

Kinematika speciální teorie relativity pomocí k-faktorů

Jan Plzák

Obsah

Úvod	4
1 Pojmy čas a prostor	5
1.1 Určení pojmu čas a jeho definice	5
1.1.1 Šipka času – doplnění	6
1.1.2 Problémy s měřením času	7
1.1.3 Definice sekundy jako jednotky času	8
1.1.4 Zavedení ideálních hodin	8
1.2 Určení pojmu délka a jeho definice	8
1.2.1 Euklidovský metrický prostor	8
1.2.2 Problémy s měřením délky	9
1.2.3 Definice metru jako jednotky délky	11
1.2.4 Zavedení ideálního délkového normálu	11
2 Úvodní pojmy	12
2.1 Vznik a vývoj teorie relativity	12
2.2 Vztažná soustava	13
2.3 Inerciální a neinerciální vztažná soustava	13
2.3.1 Příklady na procvičení vztažných soustav	14
2.4 Relativnost pohybu a klidu	14
2.5 Měření času	15
2.6 Měření délky	17
2.7 Pojem události	17
2.7.1 Příklady na procvičení měření	18
2.8 Prostorčasové diagramy	18
2.9 Relativnost současnosti	21
2.10 Prostorčasové diagramy z pohledu různě rychle se pohybujících soustav – doplnění	23
2.11 Prostorčasový interval – doplnění	24
2.12 Shrnutí pojmů	27
2.12.1 Příklady na procvičení	29
2.13 Michelsonův–Morleyův pokus	30
2.13.1 Historie měření rychlosti světla	30
2.13.2 Vor na vodní hladině	31

3	Odvození vztahů pomocí k-faktorů	35
3.1	Odvození k -faktoru	35
3.1.1	Odvození k -faktoru v Minkowského prostoru – doplnění	37
3.2	Lorentzova transformace	38
3.2.1	Odvození Lorentzovy transformace bez k -faktoru – doplnění	39
3.2.2	Porovnání Lorentzovy transformace a Galileovy transformace . .	40
3.3	Dilatace času	41
3.4	Kontrakce délek	42
3.5	Příklad – let kosmonauta (astronauta, tchajkonauta) k Plutu	45
3.6	Skládání rychlostí	48
3.6.1	Skládání rychlostí bez použití k -faktorů – doplnění	49
3.7	Relativistická dynamika	50
3.7.1	Relativistická hmotnost	50
3.7.2	Ekvivalence hmotnosti a energie	51
3.8	Řešené příklady	52
3.9	Paradoxy	54
3.9.1	Paradox dvojčat	54
3.9.2	Paradox tyče a stodoly (vlaku a tunelu) či auta a garáže	57
3.9.3	Řešení paradoxů	58
3.10	Příklady na procvičení	59
3.10.1	Dilatace času	59
3.10.2	Kontrakce délky	60
3.10.3	Skládání rychlostí	61
3.10.4	Relativistická dynamika	61
3.10.5	Energie a hmotnost	62

Úvod

Pokud někdo shání klasický výklad speciální teorie relativity, pak ho odkazuji na multimediální učebnici [13]. Tento text je podle mého velmi zdařilý. V této práci lze nalézt především prostoročasové diagramy a dále pak alternativní odvození rovnic používaných ve speciální teorii relativity na základě k -faktoru.

Pojem k -faktor zavedl Hermann Bondi v roce 1962 jako didaktickou pomůcku pro názornější pochopení vztahů užívaných ve speciální teorii relativity [14]. Pod pojmem k -faktoru lze však také vidět vztah pro příčný Dopplerův jev.

Při psaní jsem se snažil držet jednotného značení. Velkými tučnými písmeny jsou popsány světobody, například světobod **A**. Malá tučná písmena označují jednotlivé souřadnicové osy, například osa **x**. Kurzívou jsou pak označovány jednotlivé veličiny, například vzdálenost x .

Text je rozdělen na několik kapitol.

Kapitola 1 je zamyšlením nad tím, co je to čas a prostor kolem nás. V této kapitole jsem uvedl definice jednotek pro měření času a délky. Navíc jsem se zde snažil naznačit problematiku měření časových a délkových intervalů.

V kapitole 2 zavádím některé pojmy užívané při popisu dějů ve speciální teorii relativity. Dále zde popisuji konstrukci prostoročasových diagramů a výchozí principy speciální teorie relativity. Tato část by podle mého měla být úvodem do problematiky k -faktorů. Při psaní této kapitoly jsem se nechal inspirovat literaturou [1].

V kapitole 3 se zabývám zavedením k -faktoru a především odvozením vztahů pro kontrakci délky, dilataci času a Lorentzovu transformaci. Jsou zde popsány i další vztahy.

Jak kapitolu 2, tak i kapitolu 3 jsem rozdělil na menší části. Každá část je pak zakončena příklady či shrnutím.

Podkapitoly označené jako „doplnění“ jsem uvedl pouze pro rozšíření či srovnání s jinými zdroji. Jestliže by tato práce byla použita jako učební text, pak doporučuji tyto podkapitoly vynechat.

V kapitole ?? je popsáno členění výuky, které se mi osvědčilo během mých hodin fyziky.

Kapitola ?? obsahuje netradiční testy a jejich řešení.

Poslední kapitolou, kterou zmíním, je kapitola ??. Zde jsou odpovědi na některé otázky, které jsem položil studentům či svým kolegům.

V závěru pak shrnuji celkově svoji práci.

Na přiloženém kompaktním disku lze nalézt jak celou tuto práci v elektronické podobě, tak webové stránky s JAVA applety, na kterých lze demonstrovat některé vztahy a závislosti.

Kapitola 1

Pojmy čas a prostor

Pro popis fyzikálních dějů používáme pojmy čas a prostor. O těchto pojmech běžně nepřemýšlíme, bereme je jako něco, co je pro každého člověka stejné a neměnné, co není potřeba nijak vysvětlovat. Pomocí těchto pojmů obvykle definujeme jiné pojmy.

Příkladem takové definice je průměrná rychlost. Ta je dána poměrem mezi uraženou vzdáleností a pro uražení potřebnou dobou. Toto je velmi jednoduchá a intuitivní definice. Problém však nastává ve chvíli, kdy potřebujeme určit tuto dráhu a čas a tím vyjádřit velikost rychlosti.

Ještě před tím, než začnu popisovat speciální teorii relativity, se pokusím představit některé vlastnosti času a prostoru. Následující řádky však nelze brát jako nějaký pokus o definování těchto pojmů, neboť jakákoliv klasická definice zde selhává. Jen zde (pro zamyšlení) uvádím některé vlastnosti času a prostoru.

1.1 Určení pojmu čas a jeho definice

Při popisu trvání děje používáme pojem čas. V těchto popisech pod pojmem čas rozumíme počet opakování nějakého jiného vhodného děje.

Příkladem může být doba pádu tělesa. Čas, jak dlouho tento pád trval, určíme tak, že během pádu tělesa například počítáme vyslovené slabiky, počty kapek, které ukáply z nádoby, a podobně. Tomuto číslu pak říkáme čas či doba pádu tělesa.

Takto určená doba, někdy též mluvíme o časovém intervalu mezi dvěma jevy, je vztažena k jinému ději. Aby bylo možné porovnávat časové intervaly, je nutné srovnávací děj nějakým způsobem vymezit. Tento děj by měl být rovnoměrný a je vhodné, aby pravidelně procházel týmiž stavy (aby byl periodický).

Periodické opakování není požadavek nutný, jen zaručuje možnost měření jiných dějů a jejich vzájemné porovnání. Toto v praxi zaručují například stopky, či hodinky.

Samotnou podstatu času je potřeba hledat ve fyzikálních procesech. Pokud budeme mít fyzikální proces, např. pohyb molekul vody, pak je možné pozorovat několik jevů [9].

- Rychle letící molekula se může srážkami s okolními molekulami urychlit.
- Rychle letící molekula se může srážkami s okolními molekulami zpomalit.
- Pomalá molekula, která má jen průměrnou energii, se může srážkami s okolními molekulami urychlit.

- Pomalá molekula, která má jen průměrnou energii, se může srážkami s okolními molekulami zpomalit.

Z těchto jevů není na mikroskopické úrovni možno vyvodit příčinu a následek a tím zde zaniká pojem **šipka času**.

1.1.1 Šipka času – doplnění

Šipku času zřejmě můžeme pozorovat až ve chvíli, kdy dochází k nevratným dějům. U těchto jevů nemůže dojít k jejich „časovému“ obratu. V práci [12] je popsáno hned pět šipek času. Uvádím je zde jen pro zajímavost.

- Termodynamická šipka času je dána růstem entropie.
- Kosmologická šipka času je založena na Einsteinově obecné teorii relativity, odpovídá rozpínání vesmíru.
- Gravitační šipka času by měla podle uvedeného zdroje být dána tím, že se tělesa gravitačně pouze přitahují, nedochází k odpuzování.
- Kvantově mechanická šipka času v mikrosvětě. Jedná se o proces měření, který je, zdá se, nevratný.
- Poslední šipka času je dosti zvláštní. Objevuje se jen občas při reakci vysokoenergetických částic, které se dají uměle vytvořit v laboratoři a které se, snad, objevovaly i ve velmi raném vesmíru. Jedná se o neutrální K–mezony.

Tyto šipky času nám říkají, jakým způsobem postupovat, abychom určili časový interval mezi dvěma jevy. **Šipka času nám však především tvoří rozdíl mezi minulostí, přítomností a budoucností.**

Následující příklad popisuje systém, ve kterém pojem čas nemá smysl, neboť v popisovaném systému chybí šipka času.

Příklad 1 *Budeme-li chtít měřit čas **uvnitř** systému, který se může vrátit do původního stavu, pak v takovémto systému bude pojem času dosti nezvyklý. Pojem čas zde nemá skoro žádný smysl, neboť nelze rozlišit, co se stalo v minulosti, co v přítomnosti či v budoucnosti. Uvnitř takového systému nelze nikterak zjistit, kolik uběhlo cyklů. V tomto systému bude těžké rozhodnout o tom, co je příčinou a co následkem. Čas zde bude hrát roli jen mezi jednotlivými cykly. Protože se však systém může vrátit do původního stavu, veškeré vědomosti, které by v takovémto systému mohly mít myslící bytosti, by se vždy ztratily. A protože by si nikdo nic nepamatoval, nebyl by pojem čas vůbec potřeba.*

1.1.2 Problémy s měřením času

Důvodem, proč měření času závisí na způsobu, jakým čas měříme, je v některých případech nemožnost porovnávat časové intervaly mezi sebou.

Pokud chceme měřit čas, je nutné si pro jeho měření zvolit děj, který obsahuje šipku času, je rovnoměrný a opakuje se.

V dávných dobách se používala svíčka, která se nechala vyhořet, či nádoba s vodou nebo pískem.

Špatně zvolený vztažný děj demonstruje následující příklad.

Příklad 2 *Čas pohybu planety kolem Slunce mohu měřit pomocí periody kmitání závaží na zahříváné pružině. Při prvním měření zjistím například, že oběh planety trval tak dlouho, jako pět kmitů. Při dalším měření však vzhledem k zahřátí pružiny mohu zjistit, že oběh trval tři kmity. Kde je chyba?*

Na tomto příkladu je vidět, že velice záleží na způsobu měření. Je zajímavé, že při takovýchto měřeních se objevují neočekávané efekty. Z uvedeného příkladu by pozorovatel zřejmě mohl vyvodit, že na planetu působí jistý jev, který planetu zpomaluje, a tento jev bude závislý na teplotě v místě pozorování.

Na základě takovýchto příkladů zavádí R. Carnap ve své knize [5] dva druhy periodicity:

- Slabá periodicitá – příkladem je odchod pana X z domova do práce.
- Silná periodicitá – jednotlivé fáze periodického pohybu jsou shodné.

Nutno říci, že silnou periodicitu však nelze ověřit, neboť ji můžeme srovnávat opět pouze se silnou periodicitou.

Dále R. Carnap v knize [5] uvádí jisté podmínky pro měření času.

- Pravidlo rovnosti znamená, že dva časové intervaly se dají porovnávat mezi sebou pomocí nějakého výše zmíněného periodického děje.
- Pravidlo jednotné definice znamená, že čas je ve všech systémech definován stejným způsobem.
- Pravidlo aditivity znamená, že dva časové intervaly se dají převést na jeden časový interval, který je jejich součtem.

Při měření času je vhodné zvolit takový způsob měření, kterým se výše zmíněným nesnáším s neočekávanými efekty vyhneme. Je zde však ještě další problém, a to s vnímáním času pro různé pozorovatele. Zvolí-li si každý pozorovatel jiný etalon času, pak nelze jejich časové intervaly taktéž porovnávat, pokud ovšem neznáme způsob, jak tyto časové intervaly mezi sebou převádět. Pro další výklad je vhodné zvolit jednotný etalon času. Nicméně jednotný etalon času nezajistí stejný průběh času pro jednotlivé pozorovatele, vizte už speciální teorii relativity.

S vnímáním času různých pozorovatelů nastává ještě jedna drobná potíž. Pokud pozorovatelé nemají zvolený etalon času, budou se řídit podle svého prožitkového času. Tento čas je však subjektivní a v praxi nepoužitelný.

1.1.3 Definice sekundy jako jednotky času

Roku 1967 byla přijata definice tzv. atomové sekundy [18]. Stalo se tak na třinácté generální konferenci pro míry a váhy v Paříži.

„Jedna sekunda je časový interval vymezený 9 192 631 770 kmity elektromagnetického záření, jež vzniká v atomu základního izotopu cesia 133 při změně jeho energetického stavu mezi hladinami $F(3,0)$ a $F(4,0)$ v nulovém magnetickém poli.“

Definice sekundy byla později roku 1997 doplněna na setkání BIPM (Bureau international des poids et mesures — Mezinárodní úřad pro váhy a míry (Sèvres u Paříže)) následujícím dodatkem:

„Tato definice odkazuje na atom cesia v klidu při teplotě 0 K.“

1.1.4 Zavedení ideálních hodin

Ideální hodiny jsou takové, které mají zcela přesný a rovnoměrný chod a nepodléhají vnějším vlivům. Vzhledem k předchozím problémům, které jsem zmiňoval, je podmínka pro rovnoměrný chod problematická. Dají se však sestavit *světelné hodiny*, které mají rovnoměrný chod díky konstantní velikosti rychlosti světla. Tyto hodiny tvoří dvě rovinná zrcadla, která jsou upevněna ve stále stejné vzdálenosti a mezi nimi se odráží světelný paprsek. Počet odrazů pak udává čas.

1.2 Určení pojmu délka a jeho definice

Při určování vzdáleností předmětů je nutné vědět něco o prostoru, ve kterém vzdálenosti určujeme.

Jako příklad uvažujme dva cestovatele, kteří cestují ze severního pólu Země na jižní pól.

Vzdálenost těchto dvou míst bude cestovatel, který se bude plavit po moři, vnímat zcela jinak, než cestovatel, který větší část cesty podnikne po souši. Cestovateli pohybujiícímu se pěšky po povrchu terénu se cesta bude zdát delší, neboť při cestě bude muset překonat mnohá pohoří a údolí. Cestovateli plavícímu se po moři bude cesta připadat kratší, protože nemusí překonávat nerovnosti terénu.

Z tohoto příkladu je vidět, že prostor kolem nás ovlivňuje měření vzdáleností. To, jak určit vzdálenost, tím se zabývá *teorie míry*.

Uvádím zde jen pro zajímavost, jak se v teorii míry měří a popisuje vzdálenost. V dalším textu se tímto popisem nebudeme příliš zabývat. Teorie míry je však velmi důležitá k pochopení metrického tenzoru používaného právě v obecné teorii relativity. Ve své podstatě z těchto definic vyplývá, jak by se měřila vzdálenost na poušti a v horách v předchozím příkladu.

1.2.1 Euklidovský metrický prostor

Metrický prostor je dvojice (\mathcal{M}, ρ) , kde \mathcal{M} je jistá neprázdná množina a ρ je tzv. metrika, což je zobrazení $\rho : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, které splňuje následující axiomy (pro libovolná $X, Y, Z \in \mathcal{M}$):

- Axióm totožnosti : $\rho(X, Y) = 0 \iff x = y$
- Axióm symetrie : $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$
- Trojúhelníková nerovnost : $\rho(X, Z) \leq \rho(X, Y) + \rho(Y, Z)$

Uvedená definice je použita ze skript [6]. Občas se mezi základní axiomy zařazuje axióm nezápornosti, to jest, že metrika $\rho(X, Y)$ je nezáporná, není to však nutné. Nezápornost metriky totiž vyplývá z uvedených axiómů. Tyto tři axiomy metriku dostatečně popisují. Pokud \mathcal{M} zvolíme jako množinu \mathbb{R}^n , pak můžeme definovat tzv. *Euklidovskou metriku*, kde platí

$$\rho(X, Y) = \sqrt{((X_1 - Y_1)^2 + (X_2 - Y_2)^2 + \dots + (X_n - Y_n)^2)} .$$

O funkci $\rho(X, Y)$ pak mluvíme jako o *Euklidovské metrice*, což je vzdálenost dvou bodů \mathbf{X}, \mathbf{Y} o složkách X_i, Y_i v prostoru \mathbb{R}^n . Číslo n udává *dimenzi Euklidovského prostoru*.

Toto je velmi dobře známá definice vzdálenosti. Rozepsáním na

$$\rho^2(X, Y) = \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)^2 = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 ,$$

dostáváme na pravé straně normu vektoru vzdálenosti. Pro tuto normu však v obecnějším případě, tj. v křivočarých souřadnicích, platí vztah pro *Riemanovu metriku*

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} u_i u_j ,$$

kde g_{ij} je *Riemanův metrický tenzor*, zkráceně *metrický tenzor*.

V případě *Euklidova metrického prostoru* bude g_{ij} jednotkový tenzor.

V případě *Minkowského metrického prostoru* bude metrický tenzor definován jako

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} .$$

V tomto případě mluvíme o prostoročasové Minkowského metrice, neboť čtvrtou souřadnicí je čas.

Poznámka 1 *Metrický tenzor popisuje obecně geometrii prostoru, neboť je v něm obsažena informace o zakřivení prostoru.*

1.2.2 Problémy s měřením délky

Z teorie v předchozím odstavci 1.2.1 by mělo být vidět, že k měření vzdálenosti je nutno zvolit soustavu souřadnic a na této soustavě zvolit jednotkové vektory. To není tak triviální úkol. Nikde nemáme jistotu, že změním-li polohu počátku našich souřadnic, bude jednotkový vektor stále stejný. Jinak řečeno to znamená předpokládat, že délka libovolné tyče bude v každém místě prostoru stejná.

Uvedu jednoduchý příklad, na kterém si můžeme definovat základní vlastnosti prostoru. V tomto prostoru musíme navíc předpokládat, že se může šířit světlo ve formě částic.

Příklad 3 Představme si prázdný Euklidovský prostor, ve kterém se může pohybovat záření konečnou rychlostí. Bude-li v tomto prostoru samotné bodové těleso **A**, nechť je to pozorovatel, těžko můžeme cokoliv popisovat, nemáme totiž co popisovat. Bude-li zde navíc bodové těleso **B**, stále se nic nemění. Zatím nelze zvolit soustavu, vůči které bychom mohli těleso **B** popsat. Nelze popsat vztah mezi těmito body, nelze určit mezi nimi vzdálenost, neboť nemáme žádné další těleso, vůči kterému tuto vzdálenost můžeme popisovat. Budeme-li mít však v tomto prostoru tři bodová tělesa **A**, **B** a **C**, situace se změní. Nyní můžeme popisovat vzdálenost tělesa **C** vzhledem k pozorovateli **A** ve vztahu k tělesu **B**. A to za pomoci světla. Necháme-li běžat foton mezi hmotnými body **A** a **B**, pak jsme vytvořili ve své podstatě ideální hodiny. Necháme-li druhý foton běžet od pozorovatele **A** k měřenému tělesu **C** a zpět, pak porovnáním počtu odrazů paprsku běžajícího mezi hmotnými body **A** a **B** můžeme určit vzdálenost **A** od **C** jako násobek délky **A** a **B**.

Jak je vidět na tomto příkladu, pro popis je nutno mít v prostoru alespoň pět objektů. Tři body **A**, **B** a **C** a dva fotony. Složitější úvahou je možné z tohoto příkladu vyvodit, že pokud se body **A**, **B** a **C** budou od sebe vzdalovat, bude se nám zvětšovat i etalon délky. Tento pohyb nejsme schopni zaznamenat, nemáme totiž možnost zjistit, že se nám mění etalon délky. Není ho totiž možné s ničím porovnat.

Dále je zde jistým způsobem zahrnut i čas, a to jako číslo udávající počet průchodů paprsku mezi body **A** a **B**, což jsou v kapitole 1.1.4 ideální hodiny. Tento čas, jak bylo v kapitole 1.1 řečeno, musí mít svou šipku a ta je v tomto případě daná pamětí pozorovatele **A**.

V tomto příkladu je ještě implicitně předpokládáno, že světlo se šíří ve všech směrech stejnou rychlostí a rychlost světla se v prostoru nemění. Na druhou stranu tento předpoklad pozorovatel v daném příkladu nemůže nijak potvrdit, neboť by potřeboval minimálně další bodové těleso.

Tento příklad mě kdysi velice zaujal a bylo by zajímavé se jím dále zabývat, nicméně pro potřeby tohoto textu to není nutné. V našem případě se vždy pohybujeme v prostoru s prakticky nekonečně mnoha body a těmi jsou atomy, molekuly atd.

Pro další výklad popíšeme etalon metru, jaký dnes běžně používáme. A následně jeho idealizaci.

1.2.3 Definice metru jako jednotky délky

Roku 1960 byl metr definován takto [17]:

„Metr je délka rovnající se 1 650 763,7 násobku vlnové délky záření širícího se ve vakuu, která přísluší přechodu mezi energetickými hladinami $2p_{10}$ a $5d_5$ atomu kryptonu 86.“

Podle této definice šlo metr reprodukovat s přesností řádu na 10^{-9} .

Platná definice metru pochází z roku 1983:

„Metr je délka dráhy světla ve vakuu během časového intervalu $\frac{1}{299\,792\,458}$ sekundy.“

Přesnost měření délky se tak převádí na přesnost měření času, respektive frekvence.

Dnes se metr určuje s řádovou přesností 10^{-15} .

1.2.4 Zavedení ideálního délkového normálu

Ideální délkový normál (můžeme uvažovat metr) je takový, který působením vnějších sil, při změnách teploty apod. svou délku nemění. Dále o tomto normálu uvažujeme jako o ideálně tuhém, tzn. deformace se projevuje ihned v celé jeho délce.

Ideální délkový normál můžeme zavést i jednodušeji a to za pomoci radiolokační metody. Vyšleme-li signál, který se šíří konstantní rychlostí v (nejčastěji světlo) z místa **A** do místa **B** a zpět, a měříme-li při tom čas t , pak vzdálenost těchto míst od sebe bude dána vztahem $s = \frac{vt}{2}$.

Kapitola 2

Úvodní pojmy

2.1 Vznik a vývoj teorie relativity

Následující historická část je poupravena z práce [15].

Teorie relativity stojí na pomezí klasické a současné fyziky. U jejího zrodu stojí problémy optiky v pohybujících se prostředích. Ty souvisely především s rychlostí světla a s představou, že jde o příčné postupné vlnění šířící se absolutně klidným vše prostupujícím světelným éterem, který je v podstatě realizací Newtonova absolutního prostoru. Nalezením rychlosti Země vůči tomuto éteru by byla určena její rychlost v absolutním prostoru. Za tímto účelem byla prováděna řada pokusů a měření, z nichž nejznámější je pokus navržený H. A. Lorentzem a H. Poincarém na základě Maxwellovy teorie elektromagnetismu, který roku 1887 realizovali Michelson s Morleyem. S pokusem změřit éter přišel již v roce 1878 J. Maxwell, ale jeho koncepce pokusu byla odlišná. Michelson s Morleyem prováděli měření rychlosti světla vyslaného jednou ve směru a podruhé kolmo na směr pohybu Země. I přes mnohá opakování pokusu nezjistili pomocí interference světla žádný absolutní pohyb Země. Proto A. Einstein pojal tuto skutečnost do své teorie jako výchozí fakt: rychlost světla ve vakuu je konstantní a nezávislá na pohybu zdroje či pozorovatele.

Problém samozřejmě řešila také elektrodynamika zabývající se i dalšími oblastmi elektromagnetického spektra. Opět se mylně předpokládá existence éteru, který je unášen pohybujícími se tělesy, a zároveň platnost Galileiho transformace i pro elektrodynamiku. Důsledky druhého předpokladu jsou však v rozporu s experimenty, včetně Michelsonova. V roce 1889 Fitzgerald a za tři roky také Lorentz objasnili záporný výsledek Michelsonova pokusu předpokladem, že při pohybu těles vzhledem k éteru se jejich podélné rozměry určitým způsobem zkrátí. Roku 1895 prozkoumal Lorentz vztah mezi pohybujícími se tělesy a éterem a dospěl ke svým transformačním vztahům (ty publikoval až roku 1904). Tyto vztahy odvodil nezávisle roku 1900 J. Larmor. Termín Lorentzovy transformace zavedl Poincaré, který jako první vyslovil požadavek, že všechny fyzikální rovnice musí být invariantní vůči této transformaci. Formuloval také obecně princip relativity. Tím byly vytvořeny předpoklady pro vybudování teorie relativity.

Albert Einstein v roce 1905 založil speciální teorii relativity na dvou principech:

- Na principu relativity: Všechny inerciální soustavy jsou stejně vhodné pro popis fyzikálních dějů. Ve všech platí stejné fyzikální zákony.

- Na principu konstantní rychlosti světla: Ve všech inerciálních vztažných soustavách je rychlost světla ve vakuu ve všech směrech stejná a má tutéž velikost $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Einstein také ukázal aproximativní charakter Galileových transformací a nutnost nahradit je transformacemi Lorentzovými. Z toho odvodil matematickou cestou celou řadu překvapivých důsledků. Vybuďoval tak novou mechaniku, pro niž je klasická Newtonova mechanika pouhou aproximací, použitelnou pro rychlosti malé vzhledem k rychlosti světla. Jeho teorie vymýtila zavádějící pojem éteru. Po dvou letech zavedl H. Minkowski pojem čtyřrozměrného časoprostoru a novou formu zápisu veličin ve čtyřsložkovém tvaru. Sám A. Einstein provedl v roce 1915 zobecnění speciální teorie relativity respektující gravitaci i pohyb vzhledem k neinerciálním vztažným soustavám v obecné teorii relativity. Potvrzením speciální teorie relativity, především vztahu mezi hmotností a energií částice, se zabýval F. W. Aston, který zjistil hodnotu hmotnostního defektu. Prodloužení doby života rychle se pohybujících částic při pozorování Dopplerova jevu zjistili H. E. Ives a G. R. Stillwell roku 1938 a totéž bylo zjištěno pro dobu života letících mionů kosmického záření. Také obecná teorie relativity byla záhy po svém vzniku potvrzena některými jevy, především anomálií stáčení Merkurova perihelia.

Teorie relativity se tak stala základem moderní fyziky.

2.2 Vztažná soustava

Polohu tělesa udáváme běžně pomocí vzdáleností od okolních těles. Polohu tělesa nelze určovat absolutně, ale vždy relativně vůči jiným tělesům. Polohu, nebo-li vzdálenost, měříme ideálním délkovým normálem (metrem). Proces výběru těles, vůči nimž určujeme polohu nějakého tělesa, nazýváme výběrem *vztažné soustavy*.

Ve vztažné soustavě pak zavádíme *souřadnicovou soustavu*, která každé poloze tělesa přiřazuje trojici reálných čísel. Nejčastější souřadnicová soustava, která se používá, je kartézská (pravoúhlá) soustava souřadnic. Nicméně lze volit i mnohem složitější soustavy souřadnic a to obecně křivočaré soustavy souřadnic. Pro potřeby porozumění speciální teorii relativity však postačí znalost pravoúhlých soustav souřadnic. Pouze v některých případech budeme mluvit o kosoúhlých soustavách souřadnic.

2.3 Inerciální a neinerciální vztažná soustava

Podle zákona setrvačnosti (1. Newtonův zákon, který je někdy také označován jako 1. pohybový zákon) všechna tělesa setrvávají v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud nejsou působením jiného tělesa (vnější silou) nucena tento stav změnit. Tento zákon však neplatí ve všech vztažných soustavách.

Inerciální vztažnou soustavou budeme nazývat takovou soustavu, ve které platí zákon setrvačnosti. *Neinerciální vztažnou soustavou* pak bude každá soustava, která není inerciální. Zavedeme-li pojem *volné těleso*, což je takové těleso, na které okolní tělesa silově nepůsobí, pak bude platit, že v inerciální vztažné soustavě je zrychlení volného tělesa rovno nule. V prostoročasovém diagramu budeme později volné těleso zobrazovat přímoúhelnou světočarou.

Pro jednoduchost budeme nadále pod pojmem soustava předpokládat vždy inerciální vztažnou soustavu. U případných výjimek bude vždy upřesnění.

Dalším pojmem, který souvisí s inerciální vztažnou soustavou, je mechanický princip relativity. Tento princip říká, že zákony klasické (Newtonovy) mechaniky jsou ve všech inerciálních vztažných soustavách stejné a že dva pozorovatelé v různých inerciálních vztažných soustavách mohou použít k popisu událostí stejné zákony. Tento princip však platí i ve své silnější verzi a to, že **ve všech inerciálních vztažných soustavách platí stejné fyzikální zákony.**

2.3.1 Příklady na procvičení vztažných soustav

Příklad 1 *Je kulička položená na podlaze rozjíždějícího se vagónu v inerciální či neinerciální vztažné soustavě? Jak volíme tuto soustavu?*

Příklad 2 *V jaké soustavě je kniha položená na stole ve třídě? Vůči jaké vztažné soustavě? Zemi, Slunci?*

Příklad 3 *Budete-li v rozjíždějícím se autě, bude se jednat o inerciální vztažnou soustavu nebo neinerciální vztažnou soustavu? Za jakých podmínek? Vůči jaké vztažné soustavě?*

Příklad 4 *Budete-li na kolotoči, bude se jednat o inerciální vztažnou soustavu nebo neinerciální vztažnou soustavu? Vůči jaké vztažné soustavě?*

Příklad 5 *Budete-li v letadle, bude se jednat o inerciální vztažnou soustavu nebo neinerciální vztažnou soustavu? Za jakých podmínek?*

2.4 Relativnost pohybu a klidu

Protože při mechanickém pohybu se mění poloha tělesa vzhledem k jiným tělesům (vzhledem k vztažné soustavě), je nutné vždy určit, vůči kterým tělesům (vztažné soustavě) se tak děje. Pohyb a klid jsou relativními pojmy.

Tyto vztahy mezi tělesy je výhodné zakreslovat do prostoročasových diagramů, o kterých budeme mluvit v pozdějších kapitolách. Zde o nich bude jen malá motivační zmínka.

Dokonce i trajektorie pohybu je relativní, vizte následující příklad.

Příklad 6 *Představme si letadlo letící rovnoměrným přímočarým pohybem nad zemí a parašutistu.*

Z pohledu pozorovatelů na zemi se parašutista bude při seskoku pohybovat po parabole do té doby, než se mu otevře padák.

Z pohledu pilota v letadle se však parašutista bude pohybovat po přímce. Opět do té doby, než se mu otevře padák.

Z tohoto příkladu je vidět, že při popisu dějů je vždy nutné určit, vůči které vztažné soustavě budeme události popisovat. Ve výše uvedeném případě, budeme-li popisovat pohyb dvou vypuštěných těles, se nám vhodnou volbou vztažné soustavy popis výrazně zjednoduší.

Ještě v souvislosti s předchozí kapitolou by mělo být řečeno, že to, že v každé inerciální vztažné soustavě vypadá trajektorie pohybujícího se tělesa jinak, ačkoliv jsme použili stejné zákony, je tím, že v každé inerciální vztažné soustavě má těleso jiné počáteční podmínky.

2.5 Měření času

Čas nejčastěji měříme pomocí periodicky opakujících se dějů. Vždy předpokládáme, že se jedná o *ideální hodiny*. To znamená, že námi vybrané hodiny nepodléhají vnějším rušivým vlivům.

Poznámka 1 *Dříve se čas určoval podle srdečního tepu. Při takovémto měření času by odměřený čas závisel na náladě pozorovatele.*

Při určování času musíme mít vždy zvolenou soustavu, ve které budeme provádět měření, a událost, vůči které budeme ostatní události určovat. Ve většině případů z běžného života je touto soustavou povrch Země a událostí, ke které ostatní události měříme, je počátek kalendáře. Obvykle se mluví o tom, že počátek kalendáře je volený okamžikem Kristova narození, i když nikdo neví, kdy se ve skutečnosti narodil.

Poznámka 2 *Proč byl zvolen počátek našeho kalendáře zrovna na prvního ledna, to jsem se nedozvěděl. Tuto volbu učinil již Julius Caesar na radu astronoma Sosigena z Alexandrie. Již v roce 46 př. n. l. zavedl nový kalendář s 365 dny a s každým čtvrtým rokem přestupným.*

Pokud by nás zajímal přesnější okamžik, tak nový rok počítáme od půlnoci, proto i počátek kalendáře musí začínat půlnocí.

Určit okamžik události **A** pak znamená určit čas a datum, který je na hodinách a v kalendáři v místě události **A**. Správně bychom měli zaznamenat i místo, kde k události **A** došlo.

Pokud měříme čas v laboratoři, počítáme čas od nějaké významné události. Touto událostí je například uvolnění měřeného tělesa. Čas však můžeme vztahovat i k jiným, například astronomickým událostem (okamžik jarní rovnodennosti, okamžik půlnoci a tak dále).

Mnohem složitější bývá určit čas události v místě **A** v případě, že hodiny či kalendář máme v jiném místě (v místě **B**). V tomto případě je nutné z místa **A** přenést informaci o dané události do místa **B**, či naopak informaci o čase do místa události **A**.

Poznámka 3 *Tento způsob přenášení informace o čase se užíval v dobách, kdy kapesní hodinky nebyly běžně dostupné. Výstřelem z děla, či vyzváněním kostelních zvonů se oznamovalo pravé poledne.*

Protože informaci vždy posíláme pomocí nějakého signálu (světlo, zvuk atd.) a tyto signály se šíří konečnou rychlostí, musíme proto časový údaj na hodinách v místě **B** upravit vzhledem ke vzdálenosti místa události **A** a místa události **B**.

Pro zjednodušení se proto předpokládá, že v každém místě, v němž se odehrávají sledované děje, jsou nějaké hodiny. Tím odpadá posílání informace o čase. O těchto hodinách však musíme vědět ještě něco. A to, že tyto hodiny jsou *synchronizovány*, to znamená, že tyto hodiny ukazují pro současné události stejný čas.

Synchronizaci hodin můžeme provést v podstatě dvojím způsobem.

1. Synchronizace přenosem.

Všechny hodiny vezmeme do jednoho místa, kde je synchronizujeme, a pak je přeneseme do různých míst. Toto můžeme udělat jen za předpokladu, že přenášení hodin nemá vliv na chod hodin. Dnes však už víme, že přenášení hodin na jejich chod vliv má, naštěstí zanedbatelný, uvažujeme-li přenášení do malých vzdáleností a malou rychlostí. Za malou vzdálenost můžeme považovat vzdálenost do tisíce kilometrů a za malou rychlost můžeme považovat rychlost do desítek kilometrů za sekundu. S větší rychlostí a vzdáleností nemáme běžně zkušenosti a proto by bylo chybou se domnívat, že nemají na chod hodin vliv.

2. Synchronizace elektromagnetickým vlněním.

Zvolíme některé hodiny a v čase t_0 vyšleme od těchto hodin signály k ostatním hodinám. Protože elektromagnetické vlnění se šíří konečnou rychlostí c , pak do různých míst dorazí s určitým zpožděním. Proto je nutné provést korekci a na hodinách je třeba nastavit čas $t = t_0 + \frac{d}{c}$, kde d je vzdálenost mezi hodinami, od nichž jsme vysílali signál, a hodinami ve vzdálenosti d .

Zajímavý jev nastane, budeme-li pozorovat cestovatele **B** z místa **A**, kde je pozorovatel, kterým můžeme být například my. Pro popis budeme potřebovat zřejmě nějaké hodiny v tomto místě a nejlépe stejné hodiny se stejnou periodou, které bude mít cestovatel. Tyto hodiny musejí být synchronizované.

Pokud se cestovatel z místa **A** začne pohybovat a bude měřit čas, jak dlouho se pohybuje pomocí hodin, které má u sebe, pak pokud se po nějakém čase vrátí, budou hodiny cestovatele **B** ukazovat kratší čas, než naše hodiny **A** (hodiny pozorovatele). V tomto případě mluvíme o tom, že hodiny **A** a **B** se rozcházejí díky jevu dilatace času. Mějme však na paměti, že perioda hodin **B** po návratu na místo **A** bude shodná, ačkoliv při pohybu se budou periody hodin lišit.

V tomto příkladu jsme však nebrali v úvahu to, že cestovatel byl nucen vykonat zrychlený pohyb, buď se musel v jistém okamžiku zastavit a vracet zpět do místa **A**, nebo se musel pohybovat po kružnici. To znamená, že nemohl být v inerciální soustavě, ve které by se nám události popisovaly mnohem jednodušeji.

Pokud bychom chtěli tento příklad uvést i pro cestovatele, který je v inerciální soustavě, pak budeme potřebovat ještě nějaké místo **C** s hodinami, které jsou vůči nám, vůči místu **A**, v relativním klidu. Hodiny v místě **A** a **C** však musíme synchronizovat, a to nejlépe světelným signálem. Pošleme-li pak cestovatele z místa **A** do místa **C** konstantní rychlostí, cestovatel v místě **C** zjistí, že jeho hodiny jdou jinak než hodiny v místě **C**.

Buď jak buď, tento příklad ukazuje, že pohybující se hodiny naměří jiný (kratší) časový interval než nepohybující se hodiny.

Poznámka 4 Experiment ukazuje, že odchylka bude velice malá, nicméně je měřitelná. Příslušný experiment provedli v roce 1971 pánové Hafele a Keating. Tehdy byly poslány dvojce atomové hodiny kolem Země, jedny na východ a druhé na západ. Časový rozdíl naměřený na hodinách byl 39ns. V tomto případě se však jednalo o neinerciální soustavu a pro výpočet teoretické odchylky musela být brána v úvahu obecná teorie relativity.

2.6 Měření délky

Délku měříme tak, že vezmeme nějaký délkový normál a ten porovnááme s délkou měřeného předmětu. O délkovém normálu vždy předpokládáme, že je *ideálním délkovým normálem*. To znamená, že nepodléhá vnějším vlivům (nemění délku při změně teploty atd.).

Při měření těles, která jsou vůči nám v klidu, můžeme postupovat výše popsaným způsobem. Složitější jev nastane v případě, že se měřené těleso bude vůči nám pohybovat.

V případě, že se měřené těleso pohybuje, měříme délku tělesa tak, že vhodnými značkami zaznamenané současně oba koncové body pohybujícího se tělesa. Poté můžeme pomocí našeho normálu určit délku pohybujícího se tělesa přiložením délkového normálu k zaznamenaným značkám.

Problémem je ovšem vyznačení koncových bodů pohybujícího se tělesa ve stejný čas.

Poznámka 5 O tyči je možné říci, že se podobá hodinám v předchozí kapitole. Délka tyče odpovídá periodě hodin, ale vzdálenost, kterou bychom pohybující se tyčí naměřili, bude určitě větší než vzdálenost, kterou bychom naměřili nepohybující se tyčí. To koresponduje s naměřeným časem pohybujících se hodin a nepohybujících se hodin.

2.7 Pojem události

Každá událost v běžném životě probíhá v určité části prostoru a trvá určitý časový interval. Abstrakcí docházíme k pojmu *bodová událost*. Takovouto událost v souřadnicové soustavě popisujeme souřadnicemi x, y, z a přisuzujeme jí konkrétní časový okamžik t . K jednoznačnému určení bodové události nám postačí znát tyto čtyři veličiny, které označujeme jako *souřadnice události*. Někdy se těmto veličinám také říká *časoprostorové souřadnice* nebo *prostorčasové souřadnice* události.

Někdy se místo pojmu bodová událost používá pojem *světobod*.

Nadále pokud bude řeč o bodových událostech budeme tento pojem zkracovat na bod. (Míněno v prostorčasovém diagramu.)

Události, které se stanou v dané vztažné soustavě ve stejném místě, se nazývají *soumístné*.

Události, které se stanou v dané vztažné soustavě ve stejném okamžiku, se nazývají *současné*.

2.7.1 Příklady na procvičení měření

Příklad 7 *Jak změříte délku lavice bez pravítka, jen s pomocí například tužky?*

Příklad 8 *Změřte, jak dlouho je zkoušený váš spolužák bez toho, aniž byste sledovali hodiny. Zeptejte se pak zkoušeného spolužáka, jak jemu připadalo zkoušení dlouhé.*

Příklad 9 *Jakými způsoby byste dokázali měřit čas bez hodin? Zkuste jich napsat alespoň deset a poté je porovnejte s nápady vašich spolužáků.*

Příklad 10 *Zkuste popsat několik bodových událostí, které se vám dnes staly.*

Příklad 11 *Zkuste si vzpomenout a zapsat prostoročasové souřadnice událostí, kdy váš učitel řekl prosté slovo. Nezapomeňte na časový i místní údaj.*

2.8 Prostorochasové diagramy

Prostorochasové diagramy slouží především k popisu a zobrazení vztahů mezi různými událostmi v prostoru a v čase. Protože prostor, který je kolem nás, by se velmi špatně zakresloval do těchto diagramů, zjednodušujeme tyto diagramy na zápis pouze jedné prostorové souřadnice a časové souřadnice, popřípadě dvou prostorových souřadnic a časové souřadnice.

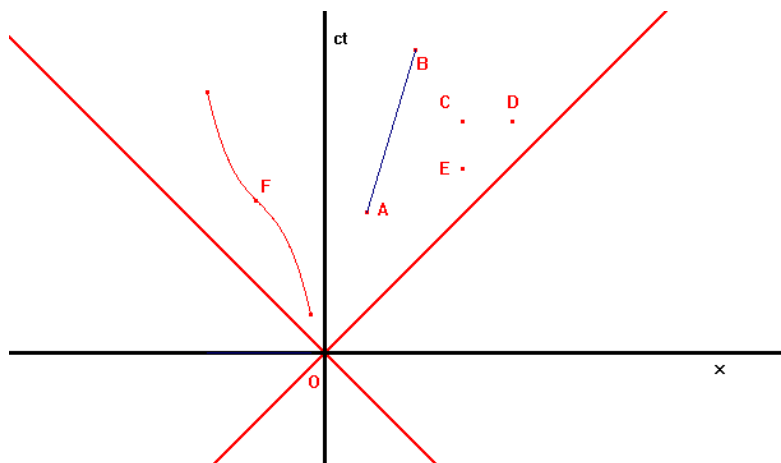
V těchto diagramech bývá zvykem na svislou osu vynášet čas a na vodorovnou osu vynášet prostorové souřadnice.

Velmi často se však místo vynášení času z důvodu dodržování homogenity (stejných) rozměrů zakresluje vzdálenost, kterou světlo za daný časový interval urazí. Každý časový interval mezi dvěma událostmi se násobí rychlostí světla a můžeme na časoprostorových diagramech označit osu ct , na kterou vynášíme právě tuto vzdálenost. Volba ct odpovídá jen vhodné volbě jednotek času.

Poznámka 6 *Do podobných diagramů se zakreslují rovnoměrné přímočaré pohyby a rovnoměrně zrychlené přímočaré pohyby. V tomto případě se však na svislou osu vynáší dráha a na vodorovnou osu se vynáší čas.*

Dojde-li k bodové události, označme ji C , pak se tato událost v prostorochasovém diagramu zobrazí jako bod. Někdy se události C říká *světobod*. Budeme-li do prostorochasového diagramu chtít zakreslit rovnoměrně přímočaré se pohybující těleso ve směru osy x , které se začalo pohybovat při události A a svůj pohyb ukončilo při události B , pak pohyb tohoto tělesa v prostorochasovém diagramu zobrazíme jako úsečku AB . O této úsečce mluvíme jako o *světočáře* tělesa. Současné události, označme je C a D , budou takové, které mají stejnou časovou souřadnici. Soumístné události, například C a E , budou pak takové, které mají stejné prostorové souřadnice. Při zakreslování nerovnoměrného pohybu, například tělesa F , nebude v prostorochasovém diagramu přímka či úsečka, ale křivka. Sklon křivky vůči ose x bude dán velikostí zrychlení. Na obrázku 2.1 jsou výše uvedené události a tělesa zakreslena.

V obrázku 2.1 je ještě navíc znázorněn červeně *budoucí světelný kužel* počátku O . V tomto případě by událost O byla událostí, při níž byl vyslán záblesk světla všemi



Obrázek 2.1: Ukázka prostoročasového diagramu. Světočára s koncovými událostmi **A** a **B** je pohybující se hmotný bod, **C** a **D** jsou současné bodové události, **C** a **E** jsou soumístitné bodové události. Červená světočára označená jako **F** znázorňuje nerovnoměrný pohyb tělesa, které začalo zrychlovat až na rychlost světla. Této rychlosti dosáhlo v okamžiku **F** a následně začalo zpomalovat. Červené polopřímky znázorňují budoucí světelný kužel.

směry. Díky volbě svislé osy jako součin času a rychlosti světla ($c \cdot t$) bude mít světelný kužel vůči ose x i vůči ose ct sklon 45° .

O světelném kuželi se mluví proto, že v případě, že bychom na vodorovnou osu vynášely dvě prostorové souřadnice, pak by světlo v grafu tvořilo kužel. Při třech prostorových souřadnicích a jedné časové se mluví o kuželové nadploše. Při jedné prostorové souřadnici a jedné časové se jedná sice o přímky, ale přesto jim i v tomto případě říkáme světočáry světelného kužele.

Poznámka 7 Pokud bychom na svislou osu z nějakého důvodu vynášeli pouze čas, pak by bylo vhodné volit jednotky takto: Na časové ose $10 \mu\text{s}$, na prostorové ose 3 km . Tyto jednotky jsou voleny tak, aby hodnota rychlosti světla byla $300\,000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

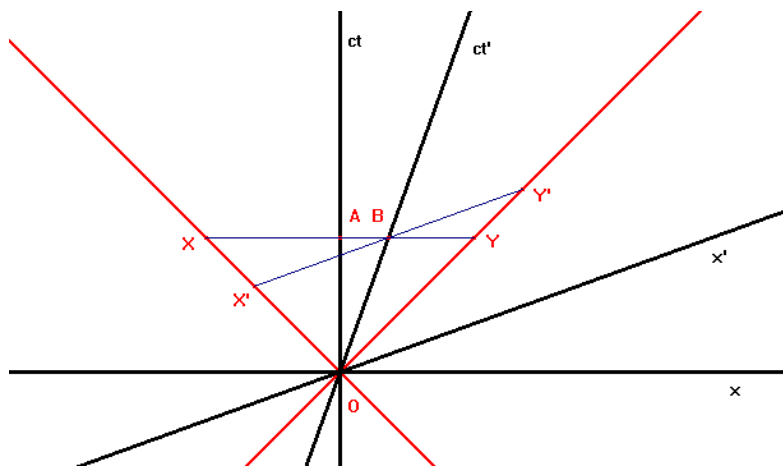
Takováto volba jednotek zaručuje, že sklon světelného kužele vůči osám bude 45° . To pak bude odpovídat prostoročasovým diagramům s osami ct a x .

Z konečné velikosti rychlosti světla, vizte kapitolu 2.1, vyplývá, že světočáry nemohou být libovolné. Jejich sklon musí být v každém světobodě větší nebo roven sklonu světočáry světla. (Tuto podmínku splňuje na obrázku 2.1 světočára bodu **F**.)

Na obrázku 2.2 je znázorněn pro představu prostoročasový diagram, ve kterém je soustava **S** s osou x , označující prostorovou souřadnici, a osou ct , označující časovou souřadnici. Osa ct je světočárou pozorovatele. Osa ct' je světočára cestovatele v soustavě **S'**, který se pohybuje konstantní rychlostí v vůči soustavě **S** ve směru osy x . Osa x' je prostorovou souřadnicí pro cestovatele v soustavě **S'**. Červeně jsou znázorněny světočáry světelného kužele.

Dále jsou na obrázku 2.2 zakresleny dvě bodové události. Událost **A** a událost **B**. Tyto události značí pozorování světelného paprsku.

Prostoročasový diagram 2.2 ve své podstatě zobrazuje, jak budou pozorovatel a cestovatel vnímat současnost vyslaných paprsků z místa události **O**.



Obrázek 2.2: *Prostorčasový diagram zobrazující současné události z pohledu pozorovatele označeného světočárou ct a z pohledu pozorovatele označeného světočárou ct'*

Pokud dvě události mají být současné, pak by v jednom okamžiku měly být od pozorovatele stejně vzdálené. Toto koresponduje s Einsteinovou definicí současných událostí.

Pokud na uvedeném obrázku pozorovatel v soustavě S při události A bude zjišťovat vzdálenost paprsků, zjistí, že události X a Y jsou pro něj současné, neboť $|AY| = |AX|$ (obě vzdálenosti jsou stejné). Pokud při události B , která je současná s událostí A pro pozorovatele, bude cestovatel určovat současné události, zjistí, že pro něj jsou současnými událostmi události X' a Y' . Pro cestovatele bude platit, že $|BX'| = |BY'|$.

Události X a Y dostaneme jako průsečík světočar světelného kužele s rovnoběžkou osy x procházející událostí A .

Události X' a Y' dostaneme jako průsečík světočar světelného kužele s rovnoběžkou osy x' procházející událostí B .

Cestovatelův prostor současných událostí (neboli prostor v jednom okamžiku) je „skloněný“ vůči prostoru stojícího pozorovatele. Zatímco klidný pozorovatel považuje okamžik B za současný se svým okamžikem A , cestovatel se svým okamžikem B vidí současný okamžik někdy před A .

Tento jev se nazývá *relativnost současnosti*. Současné vnímání událostí nastává jen tehdy, odehrají-li se obě události na tomtéž místě, nebo když jsou oba pozorovatelé vzájemně v klidu.

Poznámka 8 *Pozorovatel v okamžiku A samozřejmě nevidí jako současný okamžik B , protože světlu chvíli trvá, než tuto informaci přeneseme od jednoho k druhému. Z toho důvodu si stojící pozorovatel, v okamžiku, kdy uvidí cestovatelovy činy, do svého deníčku zapíše, že to, co vidí teď, se tam odehrálo před jistou dobou, kterou lze spočítat. Nás budou zajímat především jevy, které zbydou po odečtení zpoždění světla.*

Nakonec uvádím ukázkový příklad, na kterém jsou vidět i některé složitější světočáry.

Příklad 12 *Představme si letadlo letící rovnoměrným přímočarým pohybem nad zemí a těleso z něho vypuštěné. Trajektorie (světočára) vypuštěného tělesa vůči zemi bude pro různé vztažné soustavy různá:*

- *Ve vztažné soustavě spojené se zemí se těleso bude pohybovat po balistické křivce (pokud zanedbáme vliv atmosféry, pak se bude jednat o parabolu). V prostorovočasovém diagramu by se jednalo o světočáru, která by měla v ideálním případě tvar hyperboly. Tato hyperbola by procházela událostí, ve které by těleso i letadlo byly souměstné a těleso začíná padat. Tvar křivky by byl dán tím, že těleso (bez vlivu tření) stále zrychluje. Nesmí však překročit rychlost světla, to znamená, že se bude blížit k mezní rychlosti, která je v prostorovočasovém diagramu zobrazena světelným kuželem. Navíc by bylo nutné v prostorovočasovém diagramu použít dvě prostorové osy. (Jedná se o rovnoměrně zrychlený pohyb.)*
- *Ve vztažné soustavě spojené s letadlem se těleso bude pohybovat po přímce. V prostorovočasovém diagramu by se jednalo o světočáru, která by měla tvar hyperboly. Tato hyperbola by opět procházela událostí, ve které by těleso i letadlo byly souměstné a těleso začíná padat. Tentokrát by však stačila jen jedna prostorová osa. (Jedná se opět o rovnoměrně zrychlený pohyb.)*
- *Ve vztažné soustavě spojené s tímto tělesem se těleso vůbec pohybovat nebude. V prostorovočasovém diagramu by se jednalo o světočáru **ct**. (Událost vypuštění tělesa by byla světobodem.)*

2.9 Relativnost současnosti

V předchozí kapitole byly popsány současné události. Pro lepší pochopení tento jev uvedu ještě jednou.

V případě, že dvě události jsou souměstné, je velmi jednoduché zjistit, zda tyto události nastaly současně.

Potíž nastane u nesouměstných událostí **A** a **B**. V tomto případě se k nám informace o události dostane s jistým časovým zpožděním $\frac{d}{c}$, kde d je vzdálenost bodů **A** a **B** a c je rychlost světla ve vakuu. To může být problematické v okamžiku, kdy neznáme hodnotu rychlosti světla v daném prostředí. Jednodušším kritériem pro posouzení současnosti je Einsteinova definice současných událostí, ve které není potřeba znát číselnou hodnotu vzdálenosti ani rychlosti světla.

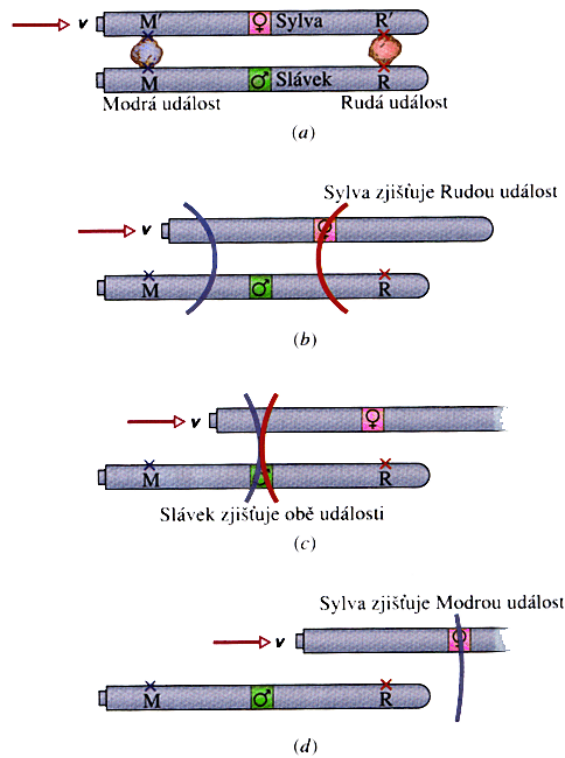
Dvě nesouměstné události v místech označených **A** a **B** jsou současné pro místo **P**, jestliže světelné paprsky vyslané z těchto bodů v okamžiku vzniku obou událostí dorazí do nějakého místa **P** stejně vzdáleného od míst **A** a **B** současně. **P** můžeme brát jako prostorovočasovou událost, při které pozorovatel zaznamená události **A** a **B**.

Zkusme se nyní podívat na to, jak budou vnímat události dva pozorovatelé Sylva a Slávek ve svých inerciálních vztažných soustavách (to mohou být například rakety). Sylva raketa na obrázku 2.3 je označena růžově. A dejme tomu, že Sylva se od Slávka vzdaluje rychlostí v . Slávkova raketa je zelená.

Událostmi, které oba budou sledovat, mohou být například záblesky dvou majáčků, modrého a rudého.

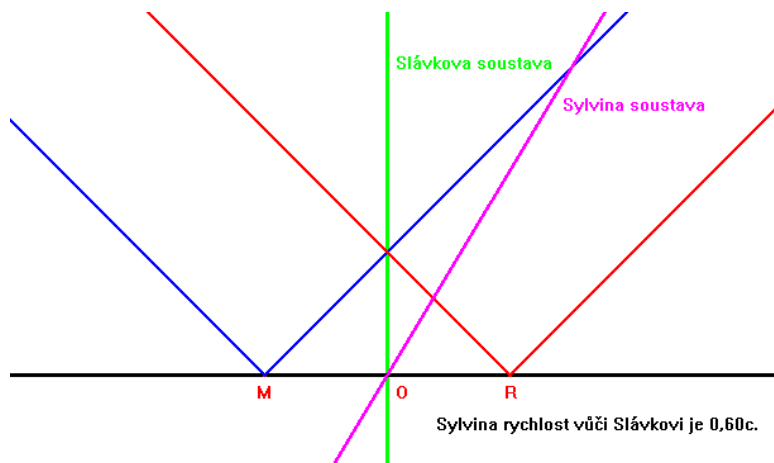
Jak je vidět na obrázku 2.3, Slávek vnímá obě události jako současné, kdežto pro Sylvu nastala rudá událost dříve, než modrá událost.

V případě, že současné události vzniknou na přímce kolmé ke směru pohybu Sylvy rakety nebo Slávkovy rakety, pak budou jak Sylva tak Slávek obě události vnímat jako současné.



Obrázek 2.3: Relativní vnímání současnosti v Sylvině vztažné soustavě a v Slávkově vztažné soustavě. Události M a R mohou být např. světelné záblesky modrého a rudého majáku na konci rakety. Tento obrázek byl zřejmě poprvé použit v knize George Gammowa, [7].

Nyní se podívejme, jak se tyto události zobrazí v prostoročasovém diagramu, vizte obrázek 2.4.



Obrázek 2.4: Prostoročasový diagram (podle obrázku 2.3) znázorňující různé vnímání modré a rudé události z pohledu Slávkovy inerciální vztažné soustavy a z pohledu Sylviny inerciální vztažné soustavy.

Modrá i rudá událost, které vznikly v čase $t = 0$, se začaly šířit prostoročasem. Na obrázku 2.4 těmito událostem odpovídají světočáry M a R a odpovídající světočáry

(modrá a rudá barva) znázorňují šířící se signál. Zeleně je znázorněna Slávkova světočára a růžově je znázorněna Sylvina světočára.

Z pohledu Slávka, který je v relativně klidné inerciální vztažné soustavě vůči Sylvě, jsou obě události současné. Současnost modré a rudé události je dána tím, že se obě světočáry protínají právě na Slávkově světočáře.

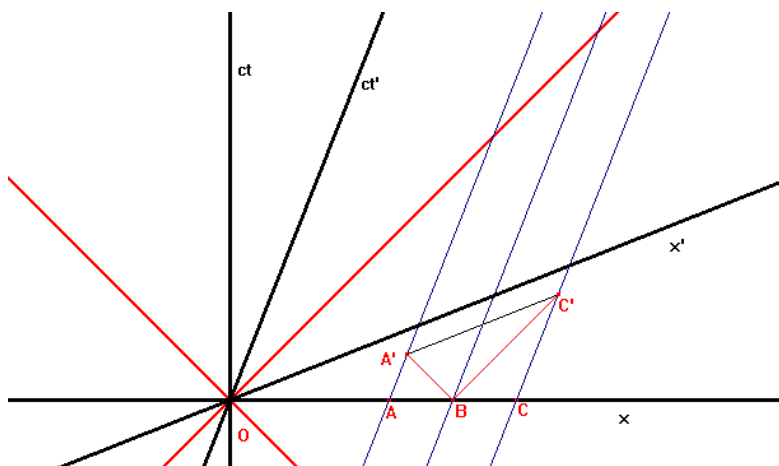
Poznámka 9 Ještě připomínám, že polopřímka nám říká, že Sylva se pohybuje rovnoměrným pohybem a sklon této polopřímky nám udává, jakou rychlostí se Sylva pohybuje. Pohyb je vztažen vůči počátku souřadnicových os daného diagramu (světobod O).

Tam, kde jsou průsečíky Sylviny růžové světočáry se světočárami modré a rudé události, tam Sylva zaregistrovala danou událost. Z obrázku 2.4 vyplývá, že Sylva zaznamená nejdříve rudou událost a později modrou událost.

2.10 Prostorčasové diagramy z pohledu různě rychle se pohybujících soustav – doplnění

Podívejme se nyní na to, jak budou zakresleny do prostorčasových diagramů různé vztažné soustavy.

Mějme soustavu S a soustavu S' , která se vůči S pohybuje rychlostí v ve směru osy x , vizte obrázek 2.5.



Obrázek 2.5: Přechod od jedné inerciální vztažné soustavy S ke druhé S' . Červeně jsou označeny světočáry světla.

Pro popis dějů je ještě nutné zvolit nějakou událost, vůči které budeme tyto děje popisovat. Nechť je touto událostí událost O , a touto událostí může být vyslání světelného signálu všemi směry. Vůči této události budeme popisovat děje, zároveň tuto událost bereme jako počátek soustav S i S' .

V soustavě S budeme vzdálenost vynášet na osu x a vzdálenost, kterou urazí světlo za čas t , budeme vynášet na osu ct . Současné události jsou pak takové události, které nastaly ve stejném čase a na diagramu by jejich spojnice byla rovnoběžná s osou x .

V soustavě S' budeme vzdálenost vynášet na osu x' a vzdálenost, kterou urazí světlo za čas t' , budeme vynášet na osu ct' . Osu ct' zkonstruujeme tak, že vůči ose ct

je pootočena o úhel α . Úhel α je dán rychlostí v a platí pro něj vztah

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} = \beta} . \quad (2.1)$$

Pro konstrukci osy \mathbf{x}' musíme využít definice současných událostí. V soustavě \mathbf{S} zvolme tři různá místa \mathbf{A} , \mathbf{B} a \mathbf{C} , pro něž platí $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BC}|$. Světočáry těchto bodů v soustavě \mathbf{S}' budou rovnoběžné s osou ct' . Vyšleme-li světelný signál z bodu \mathbf{B} , pak ve stejném okamžiku musí dospět do bodů \mathbf{A} a \mathbf{C} . V diagramu 2.5 to budou body \mathbf{A}' a \mathbf{C}' . Tyto body odpovídají současným událostem v soustavě \mathbf{S}' , proto bude jejich spojnice rovnoběžná s osou \mathbf{x}' , neboť body na této ose jsou současnými pro pozorovatele v soustavě \mathbf{S}' .

Označení β zavádím především pro zjednodušení pozdějších zápisů. Lze však říci, že β udává danou rychlost jako násobek rychlosti světla. Někdy se též o β hovoří jako o jednom z Lorentzových faktorů.

Jak je vidět, přechod od jedné inerciální vztažné soustavy k druhé je dán přechodem od jedné kosoúhlé soustavy k jiné.

2.11 Prostorčasový interval – doplnění

Tato kapitola není pro pochopení k -faktorů nikterak důležitá, je však doplněním pojmů používaných ve speciální teorii relativity. Odkaz na tuto kapitolu bude v případě alternativního odvození Lorentzových transformací.

Předpokládejme dvě inerciální vztažné soustavy, relativně klidnou soustavu \mathbf{S} a pohybující se inerciální vztažnou soustavu \mathbf{S}' . Předpokládejme, že soustava \mathbf{S}' se vůči \mathbf{S} pohybuje rychlostí v ve směru osy \mathbf{x} a osy \mathbf{y} a \mathbf{z} nechť jsou rovnoběžné s osami \mathbf{y}' a \mathbf{z}' . Uvažujme dále, že událost \mathbf{A} je vyslání světla z místa o souřadnicích x_A, y_A a z_A v čase t_A v soustavě \mathbf{S} . Šíření tohoto záblesku budeme pozorovat v soustavě \mathbf{S} . Událostí \mathbf{B} označme událost, při níž světlo dorazí do místa o souřadnicích x_B, y_B a z_B v čase t_B . Protože signál se šíří rychlostí c urazí mezi událostmi \mathbf{A} a \mathbf{B} dráhu $c(t_B - t_A)$. Vzdálenost mezi místy událostí \mathbf{A} a \mathbf{B} a dráhou uraženou za daný čas můžeme zapsat rovnicí

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - c^2(t_B - t_A)^2 = 0 .$$

Ty samé události však můžeme pozorovat ze soustavy \mathbf{S}' . Nechť událost \mathbf{A} má v soustavě \mathbf{S}' souřadnice x'_A, y'_A, z'_A a t'_A a druhá událost \mathbf{B} má souřadnice x'_B, y'_B, z'_B a t'_B . Protože i v soustavě \mathbf{S}' se jedná o šíření světla, pak platí

$$(x'_B - x'_A)^2 + (y'_B - y'_A)^2 + (z'_B - z'_A)^2 - c^2(t'_B - t'_A)^2 = 0 .$$

Protože souřadnice událostí \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou libovolné pak veličinu

$$\Delta s_{AB}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - (c\Delta t)^2 .$$

nazýváme prostorčasovým intervalem. Označením Δ značíme rozdíl souřadnic.

Z invariantnosti rychlosti světla vyplývá, že jestliže prostorčasový interval je v jedné vztažné soustavě mezi dvěma událostmi roven nule, je i v každé jiné vztažné soustavě mezi stejnými událostmi roven nule.

Výše zavedený interval má význam zobecněného kvadrátu vzdálenosti, resp. kvadrátu velikosti vektoru ve čtyřrozměrném časoprostoru.

Jedná se o rozdíl kvadrátu vzdálenosti pozorované události od pozorovatele a kvadrátu vzdálenosti, kterou by urazilo světlo za čas mezi okamžikem pozorování a vznikem pozorované události. Uvedme si příklad.

Příklad 13 *Dejme tomu, že výbuch bomby je událost \mathbf{A} a událost \mathbf{B} je chycení teroristy. Pak při dokazování, zda mohl terorista nastražit bombu, bude zřejmě fakt, zda událost \mathbf{B} je v kauzální souvislosti s událostí \mathbf{A} , neboli má-li terorista nějaké alibi. Při dokazování musíme nejdříve zjistit, jaká je vzdálenost mezi událostmi \mathbf{A} a \mathbf{B} a pak určit, kdy došlo k daným událostem. Vynásobíme-li nyní rozdíl časů mezi událostmi \mathbf{A} a \mathbf{B} rychlostí c , dostaneme maximální vzdálenost, do jaké mohl terorista utéci po nastražení bomby. Je-li takto vypočtená vzdálenost menší, než je vzdálenost, ve které byl terorista chycen, je nemožné, aby on byl příčinou události \mathbf{A} .*

Je-li $\Delta s(AB) > 0$, terorista má alibi, je-li $\Delta s(AB) = 0$, pak by se terorista musel pohybovat rychlostí světla. Z toho plyne, že terorista má i v tomto případě alibi, protože rychlostí světla se může pohybovat pouze světlo a nikoliv hmotné objekty. Je-li $\Delta s(AB) < 0$, terorista může, ale nemusí být zodpovědný za tento čin.

V některých případech je velmi výhodné zvolit osu času jako imaginární. V tomto případě můžeme psát

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + (ic\Delta t)^2 . \quad (2.2)$$

Tento vztah koresponduje s Pythagorovou větou o přeponě v pravoúhlém trojúhelníku ve čtyřrozměrném Minkowského pseudoprostoru.

Čísla x, y, z, ict můžeme označit za souřadnice události v tzv. Minkowského prostoru. Na základě tohoto označení můžeme využít vektorového počtu s takzvanými *čtyřvektory*, toto však není úkolem této práce.

Interval Δs lze využít k definici jednotky v klidné soustavě \mathbf{S} a v pohybující se soustavě \mathbf{S}' . Jednotková vzdálenost je v těchto soustavách dána vztahem

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = \pm 1 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - ct'^2 .$$

Tento výraz z geometrického hlediska představuje dvojici rovnoosých hyperbol s asymptotami $x = \pm ct$. Tyto hyperboly protínají osy v bodech mající od počátku jednotkovou vzdálenost, vizte 2.6.

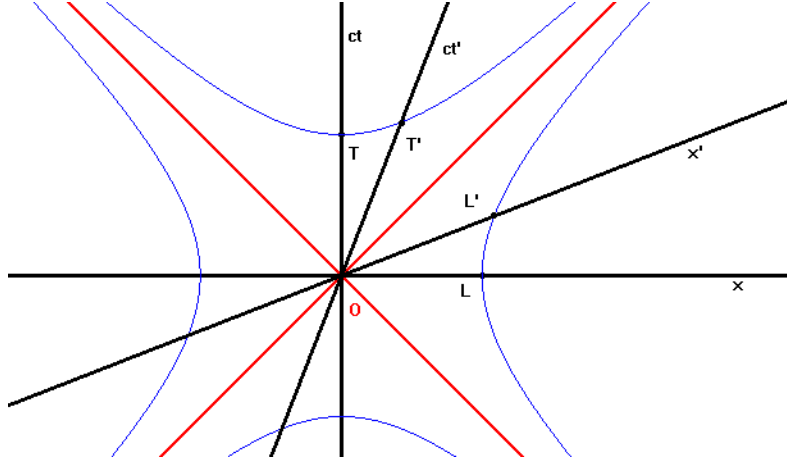
Jak je vidět, přechod od jedné inerciální vztažné soustavy k druhé je dán přechodem od jedné kosoúhlé soustavy k jiné a navíc při tomto přechodu dochází ke změnám jednotek.

Ještě je nutné k úplnému důkazu invariantnosti intervalu [11] popsat interval pro dvě nekonečně blízké události \mathbf{A} a \mathbf{B} , pak bude platit

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 .$$

Pro vztah mezi dvěma prostoročasovými intervaly v různých soustavách můžeme psát

$$ds^2 = a \cdot ds'^2 .$$



Obrázek 2.6: Znáznornění jednotky délky a času. Veličina T a L udává jednotku času a délky v nepohybující se soustavě, T' a L' pak jsou jednotky v pohybující se soustavě. Modře jsou vykresleny hyperboly popisující invariant $x^2 - c^2t^2 = \pm 1$.

O koeficientu a lze předpokládat, že závisí pouze na absolutní velikosti relativní rychlosti obou soustav. Nemůže záviset na souřadnicích ani na čase, protože potom by různé časové okamžiky a různé prostorové body nebyly rovnocenné, což by znamenalo, že prostor či čas nejsou homogenní. Nemůže záviset ani na směru rychlosti, to by bylo v rozporu s izotropií prostoru.

Budeme-li uvažovat tři souřadnicové soustavy \mathbf{S} , \mathbf{S}' a \mathbf{S}'' , přičemž absolutní velikost rychlosti \mathbf{S}' vůči \mathbf{S} označíme v_{01} a absolutní velikost rychlosti \mathbf{S}'' vůči \mathbf{S} označíme v_{02} , pak můžeme psát

$$ds^2 = a(v_{01})ds'^2, \quad ds^2 = a(v_{02})ds''^2.$$

Rovněž platí

$$ds'^2 = a(v_{12})ds''^2,$$

kde v_{12} je absolutní velikost rychlosti soustavy \mathbf{S}' vůči \mathbf{S}'' .

Porovnáním těchto vztahů dostaneme

$$\frac{a(v_{02})}{a(v_{01})} = a(v_{12}).$$

Protože absolutní velikost rychlosti v_{12} v uvedeném vztahu nezávisí jen na velikostech absolutních rychlostí v_{01} a v_{02} , ale i na jejich směru, který se v uvedeném vztahu nevyskytuje, je proto jasné, že uvedený vztah je platný jen v případě, že funkce $a(v) = 1$. Z tohoto dostáváme

$$ds^2 = ds'^2$$

a z rovnosti infinitezimálních intervalů vyplývá i rovnost

$$s^2 = s'^2.$$

Závěrem tedy je, že interval mezi událostmi je stejný ve všech inerciálních vztažných soustavách. Říkáme o něm, že je invariantní vůči transformacím popisujících přechod od jedné inerciální vztažné soustavy ke druhé.

Poznámka 10 Tento invariant je matematickým vyjádřením konstantní rychlosti světla.

2.12 Shrnutí pojmů

Proces výběru těles, vůči nimž určujeme polohu nějakého tělesa, nazýváme výběrem *vztažné soustavy*.

Souřadnicová soustava v dané vztažné soustavě přiřazuje každé poloze tělesa trojici reálných čísel. Nejčastější souřadnicová soustava, která se používá, je kartézská (pravoúhlá) soustava souřadnic.

Inerciální vztažná soustava je taková soustava, ve které platí zákon setrvačnosti.

Neinerciální vztažná soustava je taková, která není inerciální.

Volné těleso je takové těleso, na které okolní tělesa silově nepůsobí. V inerciální vztažné soustavě je zrychlení volného tělesa rovno nule.

Ideální délkový normál nepodléhá vnějším vlivům (například nemění délku při změně teploty).

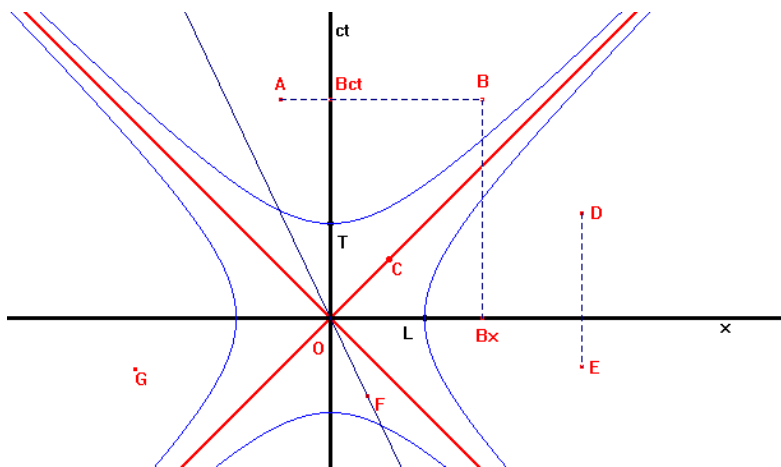
Ideální hodiny jsou takové hodiny, které nepodléhají vnějším rušivým vlivům.

Synchronizace přenosem znamená přenos všech hodin do jednoho místa, kde je synchronizujeme, a pak je přeneseme do různých míst.

Synchronizace elektromagnetickým vlněním znamená výběr hodin a vyslání signálu o daném čase k ostatním hodinám, na kterých se provede korekce.

Einsteinova definice současných událostí zní: Dvě nesoumísné události jsou současné, jestliže světelné paprsky vyslané z těchto míst v okamžiku vzniku obou událostí dorazí do místa stejně vzdáleného od těchto míst současně.

Prostorčasový diagram je schématické zobrazení 2D prostoročasu se soustavou souřadnic x a ct . Do těchto diagramů se zakreslují vztahy mezi tělesy nebo událostmi.



Obrázek 2.7: Prostorčasový diagram s několika událostmi. Červeně je vyznačen světelný kužel příslušející události O , modrá hyperbola zobrazuje prostoročasový interval.

Pojem *bodová událost* je událost, která se stala v konkrétním místě, v konkrétním čase. Události v souřadnicové soustavě popisujeme souřadnicemi $[x; y; z]$ a přisuzujeme jí konkrétní časový okamžik t . K jednoznačnému určení bodové události nám postačí znát tyto čtyři veličiny, které označujeme jako *souřadnice události*. Někdy se těmto veličinám také říká *časoprostorové souřadnice* nebo *prostoročasové souřadnice* události podle toho, zapisujeme-li čas jako první souřadnici a pak prostorové souřadnice, nebo naopak.

Souřadnice bodových událostí můžeme značit i tak, že nejdříve zapíšeme bodovou událost a jako spodní index přidáme označení souřadnicové osy. Například souřadnice bodové události **B** na obrázku 2.7 můžeme zapsat dvojicí souřadnic $[B_x; B_{ct}]$. Tohoto označení se budeme nadále držet.

Události, které se stanou v dané vztažné soustavě ve stejném místě, se nazývají *soumístitné*. Na obrázku 2.7 jsou soumístitnými událostmi události **D** a **E**.

Události, které se stanou v dané vztažné soustavě ve stejném okamžiku, se nazývají *současné*. Na obrázku 2.7 jsou současnými událostmi události **A** a **B** vzhledem k **O**.

Množinu všech bodových událostí popisujících historii nějakého objektu označujeme jako *světočáru*. Světočára pozorovatele pohybujícího se rovnoměrným přímočarým pohybem pak bude v prostoročasovém diagramu znázorněna přímkou.

Počátek v prostoročasovém diagramu je označován bodovou událostí **O**.

Prostoročasový interval mezi dvěma událostmi můžeme definovat jednoduchým vztahem $s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$, kde x_1, x_2 a x_3 jsou vzdálenosti ve třech prostorových osách a $x_4 = ct$ je vzdálenost, kterou urazí světlo za čas t . Položíme-li $s = 1$, pak tento interval v prostoročasovém diagramu s jednou prostorovou osou bude zobrazen jako hyperbola, vizte obrázek 2.7. Prostoročasový interval je vůči Lorentzově transformaci invariantem, tzn. nemění svoji hodnotu. Důkaz je proveden v kapitole 3.2.

Je-li prostoročasový interval mezi dvěma událostmi kladný, mluvíme o událostech jako o *prostorupodobných*. Na obrázku 2.7 jsou prostorupodobnými událostmi vůči události **O** události **D**, **E** a **G**. V tomto případě lze nalézt takovou inerciální soustavu, ve které by tyto události vůči události **O** nastaly současně. O těchto událostech se někdy také mluví jako o *absolutně vzdálených* nebo *absolutně nesoumístitných* či *kvazisoučasných*.

Je-li prostoročasový interval mezi dvěma událostmi záporný, mluvíme o událostech jako o *časupodobných*. Na obrázku 2.7 jsou časupodobnými událostmi vůči události **O** události **A**, **B** a **F**. V tomto případě nelze nalézt takovou inerciální soustavu, ve které by tyto události vůči události **O** nastaly současně. Lze však nalézt takovou soustavu, ve které tyto události budou soumístitné.

Je-li prostoročasový interval mezi dvěma událostmi záporný a navíc $t > 0$, pak je daná událost *absolutně budoucí* vzhledem k druhé události. Je-li $t < 0$, pak je daná událost *absolutně minulá* vzhledem k druhé. Události **A** a **B** jsou na obrázku 2.7 absolutně budoucí. Událost **F** je absolutně minulá.

Třetí možností je, když je prostoročasový interval mezi dvěma událostmi roven nule. V tomto případě jsou události **A** a **B** na povrchu světelného kužele a jsou spojeny *světelným intervalem*.

Postuláty teorie relativity jsou:

- Princip relativity: Všechny inerciální soustavy jsou stejně vhodné pro popis fyzikálních dějů. Ve všech platí stejné fyzikální zákony.
- Princip stálé rychlosti světla: Ve všech inerciálních soustavách je rychlost světla ve vakuu ve všech směrech stejná a má tutéž velikost $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Poznámka 11 Číselná hodnota velikosti rychlosti světla je dána volbou jednotky délky a jednotky času. Není problém definovat rychlost světla jako $c = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, změní se nám však velikost metru či doba trvání sekundy.

2.12.1 Příklady na procvičení

Pozor, některé příklady vyžadují i více než dvojrozměrné prostoročasové diagramy.

Příklad 14 *Jak bude v prostoročasovém diagramu zakresleno deset sekund pohybu auta, které stojí?*

Příklad 15 *Jak bude v prostoročasovém diagramu zakresleno deset sekund pohybu auta, které se pohybuje konstantní rychlostí?*

Příklad 16 *Jak bude v prostoročasovém diagramu zakreslen pohyb auta, které se nejprve vzdaluje konstantní rychlostí, pak na deset sekund zastaví a nakonec se poloviční rychlostí, než se vzdalovalo, přibližuje?*

Příklad 17 *Jak bude v prostoročasovém diagramu zakresleno dvacet sekund pohybu auta, které se deset sekund pohybuje zrychleně a pak zastaví?*

Příklad 18 *Jak bude vypadat prostoročasový diagram z hlediska nepohybujícího se pozorovatele? Tento pozorovatel sleduje pohybující se předmět, který po nějakém čase vybuchne. Po výbuchu se bude dále šířit světelný záblesk a zvuk.*

Příklad 19 *Jak budou vypadat prostoročasové diagramy vypuštěného tělesa z příkladu 12 pro vztažné soustavy spojené se zemí, letadlem a tělesem?*

Příklad 20 *Jak bude vypadat rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici v prostoročasovém diagramu?*

[Zde musíme použít prostoročasový diagram s dvěma prostorovými souřadnicemi, pak bude světočára pohybu znázorněna šroubovicí, jejíž osou bude osa ct.]

Příklad 21 *Jak bude vypadat rovnoměrný pohyb tyče v prostoročasovém diagramu, bude-li se pohybovat od pozorovatele tak, že pozorovatel ji uvidí jako bod? A jak bude vypadat, bude-li se pohybovat tak, že během pohybu pozorovatel uvidí celou její délku?*

[Pro 2D prostoročasový diagram se bude v prvním případě jednat o jedinou světočáru, v druhém případě se bude jednat o celý pás, kde světočára začátku a konce tyče nebude shodná. Pro 3D prostoročasový diagram s dvěma prostorovými souřadnicemi se v obou případech bude pohyb tyče znázorňovat jako pás ohraničený světočarami začátku a konce tyče.]

Příklad 22 *Jak bude v prostoročasovém diagramu zakreslen míč, který pozorovatel odhodí?*

[V případě, že míč odhazujeme v prostředí bez gravitace, bude se jednat o přímou světočáru, jinak světočára bude zobrazena hyperbolou.]

Příklad 23 *Jak by v prostoročasovém diagramu byly zakresleny konce vrtule helikoptéry? Předpokládejme, že helikoptéra deset sekund rovnoměrně stoupá a pak se rovnoměrným pohybem pohybuje v konstantní výšce od pozorovatele?*

[V prostoročasovém diagramu s dvěma prostorovými souřadnicemi budou konce vrtule po dobu deseti sekund zobrazeny jako šroubovice, jejichž osou bude světočára kabiny helikoptéry (ta bude zobrazena rovnoběžnou světočárou s osou ct). Po této době se bude jednat o šroubovice navinuté kolem přímé světočáry kabiny helikoptéry, sklon této světočáry bude dán rychlostí pohybu helikoptéry od pozorovatele.]

Příklad 24 *Jak budou vypadat prostoročasové diagramy vztažené k čtyřem různým předmětům? Druhý předmět je v relativním přímočarém rovnoměrném pohybu vůči prvnímu tělesu. Třetí těleso se pohybuje stejně rychle jako druhé těleso, ale opačným směrem. Čtvrté těleso se pohybuje přímočarým rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $a = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ vůči prvnímu tělesu. O třetím tělese víme ještě to, že se pohybuje rychlostí $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.*

2.13 Michelsonův–Morleyův pokus

2.13.1 Historie měření rychlosti světla

Povídání o historii je převzato z elektronického časopisu [4] a následně doplněno a upraveno.

Při pokusech změřit rychlost světla (17. století) nastal problém, vůči čemu se vlastně světlo pohybuje. Důvodem k tomu byla analogie se zvukem a s dalšími jevy. Budeme-li totiž mluvit v jedoucím vlaku, bude se zvuk ve vagónech šířit nějakou rychlostí. Bude-li nás poslouchat výpravčí na peronu, bude výsledná rychlost šíření zvuku vůči výpravčímu součtem rychlostí vlaku a rychlosti zvuku ve vlaku. Podobně je to s pohybem cestujícího na lodi vůči pobřeží.

Poznámka 12 *Zvukové vlny se v prostředí, například v kovové tyči, šíří rychlostí zhruba 5 km/s . Bude-li se tyč pohybovat vůči posluchači rychlostí například 1 km/s , pak by se zvuk v takové tyči vůči posluchači měl šířit rychlostí 6 km/s .*

Jestliže máme vlnění, pak je rozumné předpokládat, že se toto vlnění šíří v nějakém prostředí (zvuk se šíří ve vzduchu). Proto se předpokládalo, že světlo se šíří v podobě vlnění v prostředí nazývaném světelný éter. Ten podle všeho měl být dokonale tuhý, protože z předchozích úvah plynulo, že světlo se musí šířit velkou rychlostí. Navíc takový éter musí být všude kolem nás (v celém vesmíru), neboť vidíme i světlo z hvězd. Vzhledem k tomu, že pohyby planet byly popsány Newtonovými zákony bez předpokládaného éteru velmi přesně, musí být éter velmi řídký, aby nebránil v pohybu planet.

Z uvedených dvou vlastností nakonec plyne, že éter je při pomalých změnách řídký, tj. neovlivňuje pohyb planet, lidí . . . , zatímco při rychlých změnách (šíření světla) je tuhý. Z tohoto závěru plyne i předpoklad, že éter se vůči Slunci musí pohybovat velmi pomalu, v ideálním případě by se nemusel pohybovat vůbec.

Dalším důvodem těchto podivných vlastností éteru byla snaha zachovat éter pro fyzikální popis šíření světla z důvodů analogie mezi elektromagnetickým a mechanickým vlněním, neboť mechanické vlnění bylo tehdy mnohem více prostudované.

Vzhledem k tomu, že o existenci éteru byli fyzikové té doby přesvědčeni, zvolili soustavu, v níž je éter v klidu za absolutní vztažnou soustavu (absolutní inerciální soustavu) a začali tuto soustavu éteru hledat.

Předpoklad byl takový, že pokud se Země pohybuje kolem Slunce rychlostí zhruba 30 km/s , tak v tomto směru se světlo bude šířit větší rychlostí. Ve směru kolmém na pohyb Země se rychlosti Země a světla nebudou skládat. Z rozdílu těchto rychlostí by pak mělo být možné dopočítat, jakou rychlostí se Země pohybuje vůči éteru, a tak určit absolutní vztažnou soustavu.

V roce 1881 navrhl Albert Michelson experiment, který měl éter potvrdit, chyby měření však byly příliš velké. V roce 1887 byl experiment vylepšen Edwardem Morleyem. Idea experimentu byla stejná. Výsledek experimentu však nepotvrdil to, že se Země pohybuje nějakou rychlostí vůči éteru. Zjistili, že rychlost světla ve směru pohybu Země a ve směru kolmém na směr jejího pohybu je stejně velká, to znamená, že světlo se šíří všemi směry stejnou, neměnnou rychlostí, nezávisle na pohybu jeho zdroje.

Poznámka 13 *Albert Abraham Michelson pomocí svého zařízení změřil, že standard metru (uložený ve Francii) je roven 1553163,5 vlnovým délkám definovaného monochromatického červeného světla, vyzařovaného ze světelného zdroje obsahujícího kadmium. Za toto přesné měření dostal v roce 1907 Nobelovu cenu. Na základě jeho měření byla změněna definice standardu metru. Nová definice, která určovala metr jako násobek vlnové délky světla, vydržela až do roku 1983, kdy byla opět změněna. Dnes je definice metru založena na hodnotě rychlosti světla. Vizte 1.2.3.*

Je až s podivem, jak přesný musel být experiment. Porovnáváme-li rychlost pohybu Země kolem Slunce s rychlostí světla ve vakuu, dostáváme poměr $\frac{v}{c} = \frac{29,7 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}}{300000 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}} = 10^{-4}$. Přesnost experimentu však musela být mnohem větší, protože v rovnicích pro posun interferenčních proužků se vyskytuje tento poměr v kvadrátu. Takže přesnost experimentu musela být přinejmenším 10^{-8} . V roce 1907 obdržel Abraham Michelson Nobelovu cenu za přesné optické přístroje a za spektroskopické a metrologické výzkumy, které s nimi provedl.

Po tomto experimentu následovaly některé hypotézy, které měly myšlenku éteru zachránit. Například, že éter musí být Zemí strháván a tak dále. Dalšími experimenty však nakonec byla myšlenka éteru vyvrácena.

2.13.2 Vor na vodní hladině

Pro vysvětlení původního Michelsonova pokusu, který byl proveden v roce 1881, zde uvádím jednodušší příklad s vorem plujícím po hladině jezera.

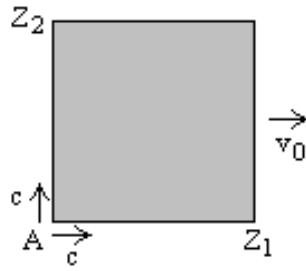
Příklad 25 *Klidná voda v jezeře bude představovat kdysi předpokládaný éter, v němž se pohybuje světlo zde představované plavcem. Pohybující se vor představuje Michelsonův interferometr. Vor nechť je čtvercový se stranou délky l_0 a nechť je rychlostí v_0 unášen po hladině. Z rohu **A** vyplují dva plavci rychlostí c . První plave k bodu **Z**₁ a zpět do bodu **A**, druhý plave k bodu **Z**₂ a zpět do bodu **A**. Naším úkolem je zjistit, který plavec se vrátí dříve. Pro rychlost c by mělo platit $c > v_0$, vizte obrázek 2.8.*

Řešení provedme ve dvou různých vztažných soustavách.

V inerciální vztažné soustavě spojené s klidnou hladinou bude řešení vypadat následovně.

*Pro čas prvního plavce, který pluje k bodu **Z**₁ a zpět k bodu **A**, můžeme psát $t_1 = \tau_1 + \tau_2$, kde τ_1 je doba, během níž plavec doplave k bodu **Z**₁, a τ_2 je doba, během níž se vrátí do bodu **A**. Protože během toho, co plavec plave, se vor pohybuje rychlostí v_0 , tak pro dráhy, které první plavec uplave, dostáváme*

$$\begin{aligned} c\tau_1 &= l_0 + v_0\tau_1, \\ c\tau_2 &= l_0 - v_0\tau_2. \end{aligned}$$



Obrázek 2.8: Obrázek znázorňující princip Michelsonova pokusu.

Pro výsledný čas pak dostáváme

$$t_1 = \frac{l_0}{c - v_0} + \frac{l_0}{c + v_0} = \frac{2 \cdot l_0}{c \cdot \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}.$$

Druhý plavec musí plavat šikmo, a to proto, že vor mu ujíždí do strany. Pro dobu, než se vrátí, bude platit $t_2 = 2t_0$, kde t_0 bude čas, než dopluje šikmo k bodu \mathbf{Z}_2 , a stejnou dobu bude muset plavat zpět do bodu \mathbf{A} . Za tuto dobu uplave vzdálenost

$$(ct_0)^2 = l_0^2 + (v_0 t_0)^2.$$

A pro dobu jeho plavání dostáváme

$$t_2 = 2t_0 = \frac{2l_0}{c\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}.$$

V inerciální vztažné soustavě spojené s vorem musíme vypočítat relativní rychlosti plavců vůči voru. Pro prvního plavce plavajícího ve směru pohybu voru bude rychlost po dráze \mathbf{AZ}_1 $c - v_0$, při zpáteční cestě bude jeho rychlost vůči voru $c + v_0$. Pro výsledný čas pak dostáváme

$$t_1 = \frac{l_0}{c - v_0} + \frac{l_0}{c + v_0} = \frac{2l_0}{c \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}.$$

Pro druhého plavce můžeme relativní rychlost vůči voru vypočítat ze vztahu $v_{rel} = \sqrt{c^2 - v_0^2}$ a pro dobu, za kterou dopluje do bodu \mathbf{Z}_2 a zpět do bodu \mathbf{A} , dostáváme

$$t_2 = \frac{2l_0}{v_{rel}} = \frac{2 \cdot l_0}{c\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}.$$

Na tomto příkladu je vidět, že pokud zvolíme inerciální vztažnou soustavu spojenou s klidnou hladinou vody, pak se plavci pohybují stejnými rychlostmi po různých drahách. V případě, že zvolíme inerciální vztažnou soustavu spojenou s vorem, pak rychlosti plavců jsou různé, ale pohybují se po stejných drahách. A jak je vidět

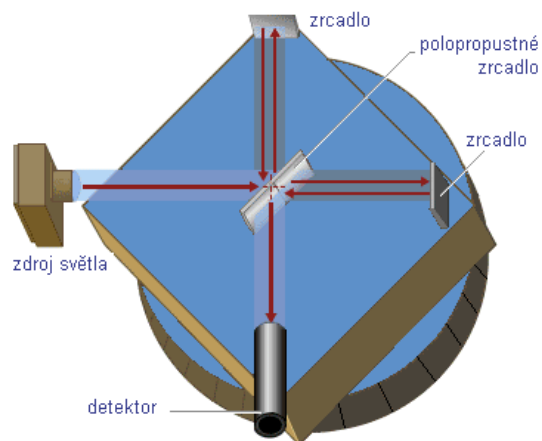
z výsledků, plavec, který plave rovnoběžně se směrem rychlosti voru, doplave později, než plavec, který plave kolmo ke směru rychlosti v_0 .

Na tomto příkladu je vidět efekt dilatace času. Plavce plavajícího kolmo ke směru rychlosti voru v_0 bychom klidně mohli ztotožnit s paprskem odražejícím se mezi dvěma zrcadly. Takto pohybující se paprsek udává čas stejně jako ideální hodiny. Plavce pohybujícího se ve směru pohybu voru, můžeme ztotožnit s paprskem odražejícím se mezi pohybujícími se zrcadly. To je však definice ideálních hodin, které se pohybují rychlostí v_0 .

Poznámka 14 V Michelsonově pokusu se jednalo o velmi podobný problém, vizte obrázek 2.9. Místo plavců bylo použito světlo a předpokládalo se, že světlo pohybující se ve směru pohybu Země kolem Slunce dorazí později, než světlo pohybující se kolmo k tomuto směru. Přesně tak jak by mělo vycházet při použití Galileovy transformace, jenže při pokusu nebylo zjištěno žádné zpoždění paprsků. To lze vysvětlit pomocí dvou hypotéz.

První je taková, že Země musí sebou strhávat éter (v kterém se pohybuje světlo při svém pohybu kolem Slunce), v naší analogii by tomu odpovídala představa, že vor strhává část vody a plavci pak plavou v této strhávané vodě. Tato hypotéza však nebyla dalšími experimenty potvrzena.

Druhým vysvětlením je to, že světlo se šíří ve všech směrech stejnou rychlostí. V naší analogii by to bylo tak, že plavci, ať plavou kterýmkoliv směrem vůči voru i vůči vodě, se pohybují stejně rychle. Tato představa je však náročnější.



Obrázek 2.9: *Princip Michelsonova–Morleyova pokusu.*
 Staženo z <http://custance.atspace.com/time1a.html> a následně upraveno.



Obrázek 2.10: *Skutečný Michelsonův–Morleyův přístroj.*
 Staženo z <http://www.aip.de/pr/Michelson.e.html> a následně upraveno.

Kapitola 3

Odvození vztahů pomocí k -faktorů

V následujícím textu se budu zabývat odvozováním vztahů, které platí pouze ve směru vzájemného pohybu jednotlivých soustav. To proto, že tyto vztahy mezi různými událostmi v těchto soustavách lze zakreslit do výše uvedených prostoročasových diagramů.

Pro směr kolmý k pohybu soustav by bylo nutné užít trojrozměrné diagramy. Tato odvození však dělat nebudu, neboť by byla dle mého nepřehledná. Z předchozí kapitoly 2.13 je možné vytušit, že ve směru kolmém nedochází v různých soustavách ani ke kontrakci délek ani k dilataci času, z čehož plyne, že nebude docházet k transformaci souřadnic kolmých na směr vzájemného pohybu jednotlivých soustav.

3.1 Odvození k -faktoru

Nyní se pustíme do odvození a zavedení k -faktoru tak, jak ho zavedl Hermann Bondi v knize *Relativity and Common Sense*, která byla poprvé publikována v roce 1962 [2], [3].

Uvažujme dvě inerciální vztažné soustavy, relativně klidnou soustavu \mathbf{S} a pohybující se inerciální vztažnou soustavu \mathbf{S}' . Předpokládejme, že soustava \mathbf{S}' se vůči \mathbf{S} pohybuje rychlostí v ve směru osy \mathbf{x} .

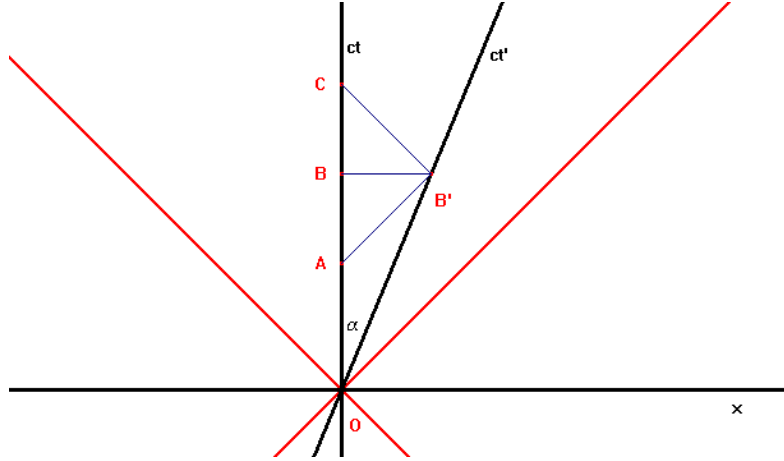
Prostoročasový diagram 3.1 zobrazuje právě tyto soustavy. Na tomto diagramu je vyznačen úhel $\alpha = \angle \mathbf{AOB}'$, pro který zřejmě musí platit, stejně jako v předchozí kapitole, vztah

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} = \beta} . \quad (3.1)$$

Poznámka 1 Označení β zavádím především pro zjednodušení pozdějších zápisů. Navíc se s tímto označením může čtenář setkat v jiné literatuře [1].

O β se mluví jako o Lorentzově faktoru.

Vzdálenost na ose \mathbf{ct} mezi událostmi \mathbf{O} a \mathbf{A} označme T . Tato vzdálenost udává souřadnici na ose \mathbf{ct} události \mathbf{A} v soustavě \mathbf{S} . Stranu \mathbf{OB}' označme kT , kde k je parametr, který podle definice popisuje podélný Dopplerův jev. My tomuto parametru budeme říkat Bondiho k -faktor, nebo jen k -faktor. Velikost kT udává souřadnici na ose \mathbf{ct}' události \mathbf{B}' v soustavě \mathbf{S}' . Pro souřadnici osy \mathbf{ct} události \mathbf{C} v soustavě \mathbf{S} dostaneme



Obrázek 3.1: V klidné soustavě S nastala událost A vyslání světelného paprsku. V pohybující se soustavě byl paprsek zachycen jako událost B' a ve stejný okamžik byl v soustavě S' vyslán paprsek zpět do soustavy S , kde byl zaznamenán jako událost C .

užitím k -faktoru velikost $k^2 T$. Zde se jedná o to, že lze-li popsat interval mezi událostmi O a B' jako k násobek intervalu mezi událostmi O a A , pak užitím relativity lze popsat interval O a C jako k násobek intervalu mezi událostmi O a B' .

Poznámka 2 Linearita vztahů je dána požadavkem, aby při transformaci souřadnic byly zachovány fyzikální zákony tak, jak je známe.

Označme B'_x souřadnici v ose x události B' v soustavě S . Tato souřadnice bude dána vztahem

$$B'_x = |\mathbf{BB}'| = |\mathbf{AB}| = \frac{k^2 - 1}{2} T. \quad (3.2)$$

Pro souřadnici osy ct události B' v soustavě S , označme ji B'_{ct} , dostáváme

$$B'_{ct} = |\mathbf{OB}'| = \frac{k^2 + 1}{2} T. \quad (3.3)$$

Porovnejme nyní poměr mezi 3.2 a 3.3 a vztah 3.1

$$\beta = \frac{\frac{k^2 - 1}{2} T}{\frac{k^2 + 1}{2} T} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}. \quad (3.4)$$

Odtud po úpravě získáme vztah

$$\boxed{k^2 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{c + v}{c - v}}. \quad (3.5)$$

Právě odvozený k -faktor udává vztah mezi naměřenými hodnotami v různých vztažných soustavách.

Jak je vidět, k -faktor nám dává do vztahu jednotkovou délku či čas v soustavě S a S' . V soustavě S' se jednotka určená v soustavě S násobí faktorem k .

Poznámka 3 Rovnice 3.5 platí v případě, že soustava se pohybuje ve směru osy x . Uvažujeme-li pohyb opačným směrem, budeme psát rychlost $-v$, pak bude platit

$$k^2 = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} .$$

Oproti rovnici 3.5 se jedná o převrácenou hodnotu.

Důvod, proč se mluví o k -faktoru v souvislosti s Dopplerovým jevem, je následující. Budeme-li uvažovat, že v soustavě \mathbf{S} bude pozorovatel v pravidelných intervalech vysílat signály s periodou T_0 , pak pozorovatel v soustavě \mathbf{S}' , který se vůči \mathbf{S} vzdaluje s rychlostí v , bude tyto signály přijímat s periodou T danou vztahem

$$T = kT_0 = T_0 \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} ,$$

kde k je koeficient Dopplerova jevu.

3.1.1 Odvození k -faktoru v Minkowského prostoru – doplnění

Odvodit k -faktor lze i jinak. Tento postup je však komplikovanější a zde ho uvádím jen pro zajímavost. V tomto případě využijeme vlastnosti Minkowského prostoru. Pro následné odvození bude nutno uvažovat osu času jako imaginární, neboť jediné tak bude možné použít k odvození Pythagorovu větu.

Pro odvození opět využijeme obrázek 3.1. Vezměme trojúhelník $\triangle \mathbf{OBB}'$. Stranu \mathbf{OA} jsme označili T a stranu \mathbf{OB}' máme označenou kT . A zkusme nyní vypočítat faktor k . Zde však musíme počítat s imaginární osou času ict a reálnou vzdáleností $a = |\mathbf{BB}'|$. Pro koeficient β v tomto případě bude platit obdobný vztah jako 3.1 a to

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{ict} = -i \frac{v}{c} = -i\beta .$$

Protože $\operatorname{tg} \alpha$ můžeme vypočítat jako

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{i(a + T)} ,$$

pak pro a bude platit

$$a = \frac{\beta}{\beta - 1} T .$$

Pro strany trojúhelníku $\triangle \mathbf{OBB}'$ bude podle Minkowského geometrie platit vztah

$$a^2 + (ia + iT)^2 = (ikT)^2 .$$

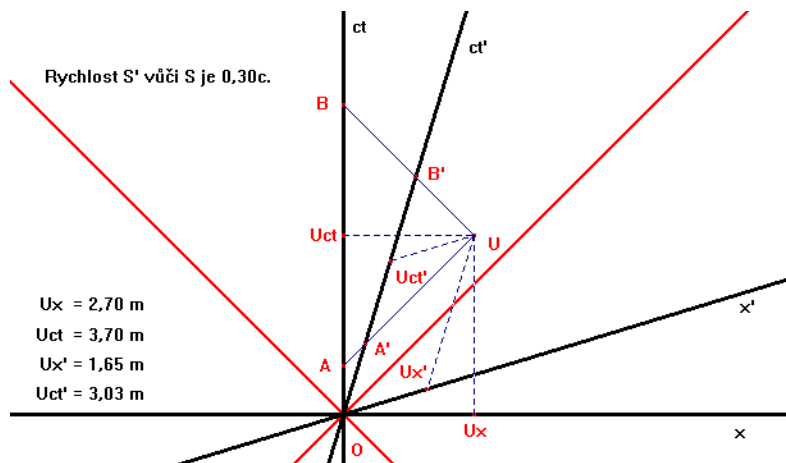
Po dosazení předchozího vztahu a několika jednoduchých úpravách dostáváme výsledný vztah pro k -faktor

$$k^2 = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta)^2} .$$

Tento vztah je po vykrácení stejný jako 3.5.

3.2 Lorentzova transformace

Odvoďme Lorentzovy transformace podle obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Zobrazení souřadnic události U v soustavě S a v soustavě S' .

Podle obrázku 3.2 můžeme označit souřadnice události U v soustavě S jako $(ct; x)$ a v soustavě S' jako $(ct'; x')$. Dále označme souřadnice události A v soustavě S jako $(T_1, 0)$ a souřadnice události A' v soustavě S' jako $(kT_1; 0)$. Souřadnice události B' v soustavě S' označme jako $(T_2, 0)$ a souřadnice události B v soustavě S označme jako $(kT_2, 0)$.

Vyjádřením souřadnic událostí A a A' a událostí B' a B pomocí události U a jejich porovnáním dostaneme následující rovnice

$$ct' - x' = k(ct - x), \quad (3.6)$$

$$ct + x = k(ct' + x'). \quad (3.7)$$

Zde je vzdálenost $|\mathbf{OB}| = ct + x$ a vzdálenost $|\mathbf{OB}'| = ct' + x'$, přičemž jedna vzdálenost je k násobkem druhé. Podobně tomu je pro události A a A' .

Přičteme-li k rovnici 3.6 $2x'$ a dosadíme-li do rovnice 3.7, dostáváme po úpravě vztah

$$x' = \frac{1+k^2}{2k} \cdot x + \frac{1-k^2}{2k} \cdot ct, \quad (3.8)$$

po dosazení za k dostáváme známější tvar

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot x - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot ct. \quad (3.9)$$

Odečteme-li od rovnice 3.6 $2ct'$ a dosadíme-li do rovnice 3.7, dostáváme po úpravě vztah

$$ct' = \frac{1-k^2}{2k} \cdot x + \frac{1+k^2}{2k} \cdot ct, \quad (3.10)$$

po dosazení za k dostáváme známější tvar

$$ct' = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot ct. \quad (3.11)$$

Obdobně můžeme odvodit i inverzní přechod mezi soustavami, ten bude dán vztahy

$$x = \frac{1+k^2}{2k} \cdot x' - \frac{1-k^2}{2k} \cdot ct' , \quad (3.12)$$

$$ct = -\frac{1-k^2}{2k} \cdot x' + \frac{1+k^2}{2k} \cdot ct' . \quad (3.13)$$

Poznámka 4 Po malé úpravě lze místo $\frac{1-k^2}{2k}$ psát $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} + k\right)$.

Po dosazení za k -faktor pak dostáváme inverzní vztahy ve tvaru:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot x' + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot ct' \\ ct &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot x' + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot ct' \end{aligned}} \quad (3.14)$$

Poznámka 5 Budeme-li uvažovat, že soustava \mathbf{S}' se pohybuje rychlostí v proti směru osy x soustavy \mathbf{S} , pak inverzní vztah můžeme dostat pouhým dosazením $-\beta$ za β . V případě k -faktorů dosazujeme za k převrácenou hodnotu, to jest $\frac{1}{k}$.

Při použití rovnic podle poznámky 4 lze při volbě rychlosti proti směru osy x pouze přehodit v příslušných výrazech členy k a $\frac{1}{k}$.

Vynásobením 3.6 s 3.7 dostáváme vztah pro prostoročasový interval

$$\boxed{x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2} . \quad (3.15)$$

Vlastnosti Lorentzových transformací

- čas a prostor nejsou nezávislé
- Galileovy transformace jsou aproximací Lorentzových transformací, vizte 3.2.2
- kauzalita (příčina a následek) se zachovává
- nezachová se současnost
- nezachová se souměrnost

3.2.1 Odvození Lorentzovy transformace bez k -faktoru – doplnění

Lorentzovu transformaci můžeme odvodit i jinak, a to stejným způsobem, jako je odvozena v knize [10]. Toto odvození však není tak názorné jako odvození pomocí k -faktorů.

Kulovou světelnou vlnu můžeme popsat pomocí intervalu s . Tuto vlnu předpokládáme ve všech inerciálních soustavách stejnou a proto pro klidnou soustavu \mathbf{S} a pohybuující se soustavu \mathbf{S}' budeme předpokládat, že platí

$$x^2 + y^2 + z^2 + (ic\Delta t)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + (ic\Delta t')^2 . \quad (3.16)$$

Nyní naším úkolem bude najít transformační vztahy mezi soustavou \mathbf{S} a \mathbf{S}' , která se pohybuje vůči \mathbf{S} rychlostí v ve směru osy \mathbf{x} . Tyto vztahy mohou být libovolné, ale z důvodu jednoduchosti je vhodné je volit jako lineární. Volme je ve tvaru

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - \beta ct) , \\y' &= y , \\z' &= z , \\ct' &= \alpha x + \delta ct .\end{aligned}\tag{3.17}$$

Zde navíc předpokládáme, že pohyb soustavy \mathbf{S}' vůči \mathbf{S} rychlostí v nemění vztahy pro vzdálenosti (souřadnice) kolmé na směr pohybu. Po dosazení 3.17 do 3.16 dostáváme

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\gamma\beta , \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} , \\ \delta &= \gamma .\end{aligned}$$

Po dosazení těchto vztahů do 3.17 dostáváme Lorentzovy transformace

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} , \\y' &= y , \\z' &= z , \\ct' &= \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} .\end{aligned}$$

Poznámka 6 Jak je vidět, odvození Lorentzových transformací pomocí k -faktorů je mnohem jednodušší a názornější.

3.2.2 Porovnání Lorentzovy transformace a Galileovy transformace

Vezmeme-li Lorentzovy transformace ve tvaru 3.14 a budeme-li uvažovat rychlosti výrazně menší než je rychlost světla, pak bude platit

$$v \ll c \Rightarrow \frac{v}{c} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 1 .$$

Jinak řečeno člen β lze zanedbat.

Po dosazení do 3.14 dostaneme transformace ve tvaru

$$\begin{aligned}x &= x' + v \cdot t' , \\ ct &= ct' .\end{aligned}$$

Těmito transformacím se říká Galileovy transformace, jsou to ty, které se učí na základní škole, které známe z běžné praxe.

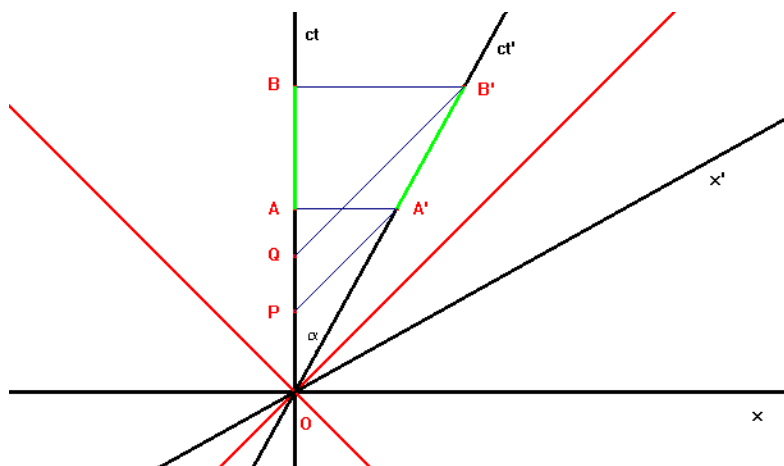
3.3 Dilatace času

Vztah pro dilataci času odvodíme podle obrázku 3.3. V soustavě S mějme hodiny, které jsou v relativním klidu vůči soustavě S . Druhé hodiny umístíme do soustavy S' , jejíž rychlost vůči S nechť je v ve směru osy x soustavy S . Časy budeme měřit vůči události O , při které byly počátky obou soustav S i S' ve stejném místě prostoru. Předpokládejme, že při této události byly hodiny synchronizované.

Nastanou-li v soustavě S dvě po sobě následující události P a Q , například záblesky světla, zaznamenané příjem těchto signálů na hodinách v soustavě S' jako události A' a B' . V soustavě S pak uvažujme události A a B , které jsou z pohledu soustavy S současné s událostmi A' a B' .

Naším úkolem je porovnat časy vzniku událostí A' a B' v soustavě S' s časy vzniku událostí A a B v soustavě S . Tím dostaneme vztah označovaný jako *dilatace času*.

Poznámka 7 Při výpočtu musíme brát v úvahu to, že světlu nějakou dobu trvalo, než dorazilo ze soustavy S do soustavy S' .



Obrázek 3.3: Zelená barva vyznačuje časový interval mezi událostmi A a B v klidné soustavě S a v pohybující se soustavě S' mezi událostmi A' a B' .

Označme časový interval OP v klidné soustavě S jako T_1 a interval OQ jako T_2 .

Pro odvození dilatace času nejdříve určíme souřadnice ct událostí A' a B' v soustavě S . Tyto souřadnice budou dány, vzhledem k definici k -faktoru, následujícími vztahy

$$\begin{aligned} A'_{ct} &= |OA| = \frac{k^2 + 1}{2} T_1, \\ B'_{ct} &= |OB| = \frac{k^2 + 1}{2} T_2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Poznámka 8 Indexy ve vztazích 3.18 určují, jakou souřadnici v jaké soustavě chceme popsat.

Například vzdálenost události A měřená v soustavě S' vůči počátku O' (což je podle obrázku 3.3 událost O) by byla $A_{x'}$.

Z uvedených vztahů pak pro časový interval v klidné soustavě \mathbf{S} , mezi událostmi \mathbf{A}' a \mathbf{B}' , označme ho ΔT , dostáváme z rovnic 3.18 vztah

$$\Delta T = B'_{ct} - A'_{ct} = |\mathbf{AB}| = \frac{k^2 + 1}{2}(T_2 - T_1) . \quad (3.19)$$

Pro časový interval v pohybující se soustavě \mathbf{S}' mezi událostmi \mathbf{A}' a \mathbf{B}' , označme ho $\Delta T'$, dostáváme užitím k -faktorů

$$\Delta T' = B'_{ct'} - A'_{ct'} = |\mathbf{A'B}'| = k(T_2 - T_1) . \quad (3.20)$$

Porovnáním 3.19 a 3.20 dostáváme

$$\Delta T' = \frac{2k}{k^2 + 1} \Delta T . \quad (3.21)$$

Na obrázku 3.3 jsou $\Delta T'$ a ΔT zvýrazněny zeleně.

Po dosazení za k -faktor dostáváme

$$\boxed{\Delta T' = \Delta T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (3.22)$$

Obvyklejší vyjádření je ve tvaru

$$\Delta T = \frac{\Delta T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (3.23)$$

Zde $\Delta T'$ se často také označuje jako vlastní čas.

Rovnice 3.22 (3.23) popisuje vztah mezi časovými intervaly událostí, které nastaly v pohybující se soustavě \mathbf{S}' , měřené hodinami v soustavě \mathbf{S}' a hodinami v soustavě \mathbf{S} . Pozorovatel v soustavě \mathbf{S}' se dívá na své hodiny a měří pomocí svých hodin časový interval nějakých událostí ve své soustavě \mathbf{S}' . Tento pozorovatel naměří čas $\Delta T'$. Když časový interval mezi těmito samými událostmi bude měřit pozorovatel v soustavě \mathbf{S} svými hodinami, naměří na svých hodinách čas ΔT . Nutno říci, že \mathbf{S}' se vůči \mathbf{S} pohybuje rychlostí v .

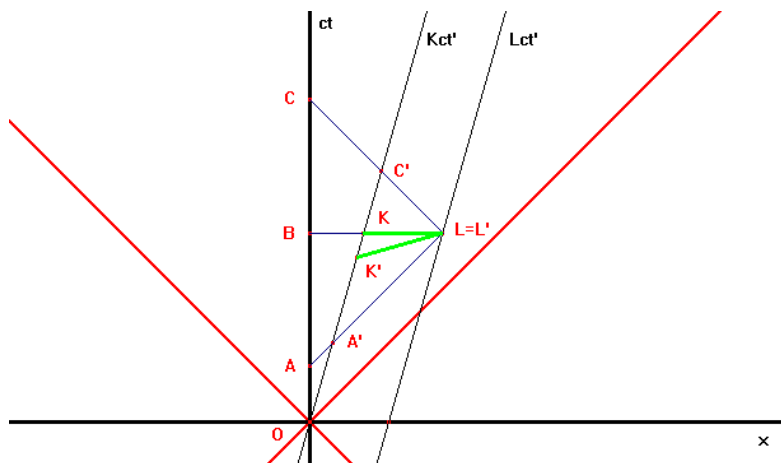
Jinak řečeno: **Hodiny pohybující se vzhledem k pozorovateli jdou pomaleji než hodiny, které jsou vzhledem k pozorovateli v klidu.**

Poznámka 9 Pozor na to, ze které soustavy pozorujeme který děj. Velmi často dojde k záměně času v soustavě \mathbf{S} s časem v soustavě \mathbf{S}' a tím vznikají zbytečné chyby.

3.4 Kontrakce délek

Kontrakci délky odvodíme podobně jako dilataci času. Užitím radiolokační metody převedeme délku tyče na časový interval mezi přijetím dvou signálů vyslaných současně z obou konců tyče.

Mějme opět dvě soustavy \mathbf{S} a \mathbf{S}' . Soustava \mathbf{S}' nechť se vůči soustavě \mathbf{S} pohybuje rychlostí v ve směru osy \mathbf{x} soustavy \mathbf{S} . Předpokládejme, že při události \mathbf{O} byly počátky obou soustav \mathbf{S} i \mathbf{S}' ve stejném místě prostoru.



Obrázek 3.4: Zobrazení pohybující se tyče vůči soustavě S s krajními body K a L . Zeleně jsou označeny délky této tyče pro pozorovatele v soustavě S a pro pozorovatele v soustavě S' .

V soustavě S' mějme tyč, jejíž počáteční bod označme K a koncový bod označme L . Na obrázku 3.4 jsou tyto konce tyče zobrazeny jako světočáry.

Budeme-li tyč měřit, pak délka tyče z pohledu pozorovatele v soustavě S' bude dána vzdáleností $|K'L'|$. Délka tyče z pohledu pozorovatele v soustavě S bude dána vzdáleností $|KL|$. Délku tyče v soustavě S označme ΔL a délku tyče v soustavě S' označme $\Delta L'$.

Naším úkolem bude zjistit vztah mezi ΔL a $\Delta L'$.

Chceme-li určit délku tyče v soustavě S' , není problém, stačí přikládat délkové měřidlo. Chceme-li však určit délku tyče v soustavě S , problém nastává, protože tyč se vůči nám bude pohybovat. Abychom změřili délku tyče, musíme současně určit polohu obou konců tyče. To můžeme udělat tak, že vyšleme při události A ze soustavy S signál, který se odrazí od koncového bodu tyče (na obrázku 3.4 je tato událost označena jako L'). Tento odražený signál přijmeme v soustavě S jako událost C .

Čas události A v soustavě S vůči počátku O označme T_1 , za pomoci souřadnic by platilo i označení $A_{ct} = T_1$. Čas události C v soustavě S vůči počátku O označme T_2 , za pomoci souřadnic by platilo i označení $C_{ct} = T_2$.

Za pomoci uvedeného označení můžeme čas a místo odrazu z pohledu pozorovatele v soustavě S vypočítat jako

$$L'_{ct} = L_{ct} = K_{ct} = B_{ct} = \frac{T_2 + T_1}{2},$$

$$L'_x = L_x = \frac{T_2 - T_1}{2}.$$

Pro určení délky tyče v soustavě S teď stačí určit vzdálenost události K , která nastala současně s událostí L (odraz signálu), vizte obrázek 3.4.

Tato vzdálenost bude dána vztahem

$$K_x = \beta K_{ct} = \beta \frac{T_2 + T_1}{2},$$

kde β je Lorentzův faktor příslušející pohybu soustavy S' vůči S , vizte 3.1.

Z hlediska pozorovatele v soustavě \mathbf{S} bude mít tyč délku

$$\Delta L = L_x - K_x = \frac{T_2 - T_1}{2} - \beta \frac{T_2 + T_1}{2}, \quad (3.24)$$

kde k je k -faktor příslušející pohybu soustavy \mathbf{S}' vůči \mathbf{S} .

Pozorovatel v soustavě \mathbf{S}' by signál vyslaný při události \mathbf{A} zaregistroval jako událost \mathbf{A}' , v čase $A'_{ct'} = kT_1$. Signál po odrazu by zaznamenal jako událost \mathbf{B}' v čase $B'_{ct'} = \frac{T_2}{k}$.

Proto z hlediska pozorovatele v soustavě \mathbf{S}' bude mít tyč délku

$$\Delta L' = L'_{x'} - K'_{x'} = \frac{1}{2} \left(\frac{T_2}{k} - kT_1 \right) - 0. \quad (3.25)$$

Poznámka 10 Jen připomínám, že platí následující vztahy.

V soustavě \mathbf{S}' platí $|\mathbf{A}'\mathbf{K}'| = |\mathbf{K}'\mathbf{L}'| = |\mathbf{K}'\mathbf{C}'|$.

V soustavě \mathbf{S} platí $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BL}| = |\mathbf{BC}|$.

Porovnáním vztahů 3.24 a 3.25 dostáváme

$$\frac{\Delta L}{\Delta L'} = \frac{(T_2 - T_1) - \beta(T_2 + T_1)}{\frac{T_2}{k} - kT_1} = \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (3.26)$$

Po malé úpravě dostáváme

$$\boxed{\Delta L = \Delta L' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.27)$$

Po přepsání pomocí k -faktoru dostáváme vyjádření 3.27 ve tvaru

$$\Delta L = \frac{k^2 + 1}{2k} \Delta L'. \quad (3.28)$$

V této rovnici se někdy $\Delta L'$ označuje jako klidová, vlastní délka. Rovnice 3.27 popisuje vztah mezi délkou tyče v pohybující se soustavě \mathbf{S}' a délkou tyče v soustavě \mathbf{S} . Pozorovatel v soustavě \mathbf{S}' si vezme svojí tyč a pomocí ní měří nějakou vzdálenost. Tento pozorovatel naměří délku $\Delta L'$. Když tutéž vzdálenost bude měřit pozorovatel v soustavě \mathbf{S} svojí tyčí, naměří délku ΔL . Nutno říci, že \mathbf{S}' se vůči \mathbf{S} pohybuje rychlostí v podél měřené vzdálenosti.

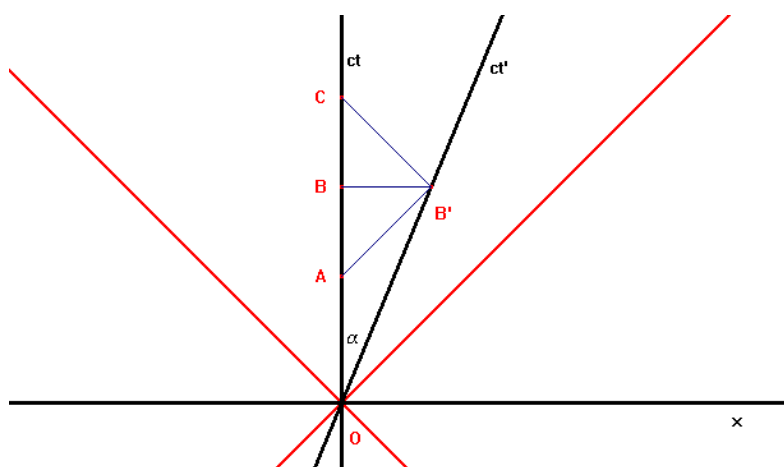
Jinak řečeno: **Délka tyče v soustavě, vzhledem k níž se tyč pohybuje, je menší než její klidová délka.**

Poznámka 11 To znamená, že měříme-li pohybující se tyčí tyč, která je v relativním klidu, pak zjišťujeme, že tato klidná tyč má relativně menší délku oproti pohybující se tyči. A s časem se to má tak, že měříme-li hodinami, které jsou v pohybu, čas nějakého periodického děje, který probíhá v klidné soustavě, naměříme delší časový okamžik než hodinami, které jsou v klidné soustavě s daným periodickým dějem.

3.5 Příklad – let kosmonauta (astronauta, tchajkonauta) k Plutu

Příklad 1 *Vzdálenost mezi Plutem a Zemí je zhruba $s = 6 \cdot 10^{12}$ m. Kosmonaut se pohybuje rychlostí $v = 0,5c$.*

1. *Jak dlouho bude kosmonautovi trvat cesta k Plutu, budeme-li ji měřit hodinami umístěnými na Zemi?*
2. *Jak dlouho bude kosmonautovi trvat cesta k Plutu, bude-li ji měřit svými hodinami na palubě vesmírné lodi?*
3. *Jakou vzdálenost od Země k Plutu naměří kosmonaut těsně po startu?*



Obrázek 3.5: V relativně klidné soustavě S je událostí O označen start rakety. Soustava S' je inerciální soustava spojená s raketou. Přilet rakety k Plutu z pohledu pozorovatele v soustavě S (z pohledu ze Země) je označen jako bod B . Událost B' je přilet rakety k Plutu z pohledu cestovatele v soustavě S' (z pohledu kosmonauta). Obě dvě události vztahujeme k události O .

Pro představu použijeme obrázek 3.5, kde vzdálenost Země Plutu, označme ji s , je vzdáleností mezi událostmi B a B' .

Máme-li odpovědět na první otázku, stačí nám z obrázku 3.5 určit velikost intervalu mezi událostmi O a B . Označme velikost tohoto intervalu t .

Odpovědět na druhou otázku znamená určit velikost intervalu mezi událostmi O a B' . Označme velikost tohoto intervalu t' .

Nejsnazší je odpovědět na první otázku, pohybuje-li se vesmírná loď rychlostí $v = 0,5c$, a má-li urazit vzdálenost $s = 6 \cdot 10^{12}$ m, pak doba, za kterou se tam dostane, bude

$$t = \frac{s}{v} = \frac{6 \cdot 10^{12}}{0,5 \cdot 3 \cdot 10^8} = 40000 \text{ s} \doteq 11,11 \text{ hod} .$$

Poznámka 12 *Kdo by chtěl, může využít k -faktor podle obrázku 3.5 a postupovat takto:*

Faktor β bude podle zadání $\beta = 0.5$. Pro k -faktor dostáváme

$$k = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \sqrt{3} .$$

Souřadnice události \mathbf{B}' v soustavě \mathbf{S} budou mít podle 3.2 a 3.3 tvar

$$B'_{ct} = \frac{k^2 + 1}{2}T = ct ,$$

$$B'_x = \frac{k^2 - 1}{2}T = s .$$

Řešením soustavy rovnic 12 dostáváme pak výsledek

$$t = \frac{s}{c} \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} = \frac{6 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 10^8} \cdot \frac{4}{2} = 40000 \text{ s} \doteq 11,11 \text{ hod} .$$

Tento postup je sice náročnější, ale zato poukazuje na dokonalé zvládnutí k -faktorů.

Při řešení druhé otázky můžeme využít vztah 3.22, pak dostaneme

$$t' = t\sqrt{1 - \beta^2} = 40000\sqrt{1 - 0,5^2} \doteq 34641 \text{ s} \doteq 9,6225 \text{ hod} .$$

Poznámka 13 Samozřejmě není potřeba si pamatovat vztah 3.22. Postupovat můžeme třeba takto:

Souřadnice ct události \mathbf{B} v soustavě \mathbf{S}' a souřadnice ct' události \mathbf{B}' v soustavě \mathbf{S} budou mít podle 3.3 a podle definice k -faktoru tvar

$$B_{ct'} = kT = ct' ,$$

$$B'_{ct} = \frac{k^2 + 1}{2}T = 40000c .$$

Řešením soustavy rovnic 13 dostáváme pak výsledek

$$t = 40000 \cdot \frac{2k}{k^2 + 1} = 40000 \frac{2\sqrt{3}}{4} \doteq 34641 \text{ s} \doteq 9,6225 \text{ hod} .$$

Odpověď na třetí a poslední otázku získáme dosazením do vztahu 3.27, dostáváme tak

$$s' = s\sqrt{1 - \beta^2} = 6 \cdot 10^{12}\sqrt{1 - 0,5^2} \doteq 5,2 \cdot 10^{12} \text{ m} .$$

Poznámka 14 Samozřejmě opět není potřeba si pamatovat vztah 3.27. Při řešení můžeme postupovat třeba takto:

Uvědomíme-li si, že vzdálenost, kterou musí urazit kosmonaut ve své vesmírné lodi (v soustavě \mathbf{S}'), je rovna součinu jeho rychlosti a doby, po kterou on letí, dospějeme k výsledku

$$s' = v \cdot t' = 0,5c \cdot 34641 \doteq 5,2 \cdot 10^{12} \text{ m} .$$

Příklad 2 Jak zestárne cestovatel, bude-li cestovat k α Centauri C, vzdálené od nás 4,223 ly (268000 AU, 1,295 pc, $4 \cdot 10^{16}$ m), a zpět rychlostí 0,96c? Jak zestárne jeho tříletý syn, který zůstal na Zemi?

Z pohledu syna na Zemi bude otci cesta k α Centauri C trvat

$$t = \frac{4,223}{0,96} \doteq 4,4 \text{ let .}$$

Z pohledu cestovatele můžeme pro výpočet užít vztah 3.22 a dostaneme

$$t' = t\sqrt{1 - 0,96^2} \doteq 1,232 \text{ let .}$$

Poznámka 15 Pro cestovatele bude vzdálenost mezi Zemí a α Centauri C zkrácena podle vzorce 3.27. Nebo z jiného pohledu, jeho čas bude plynout pomaleji podle vzorce 3.22.

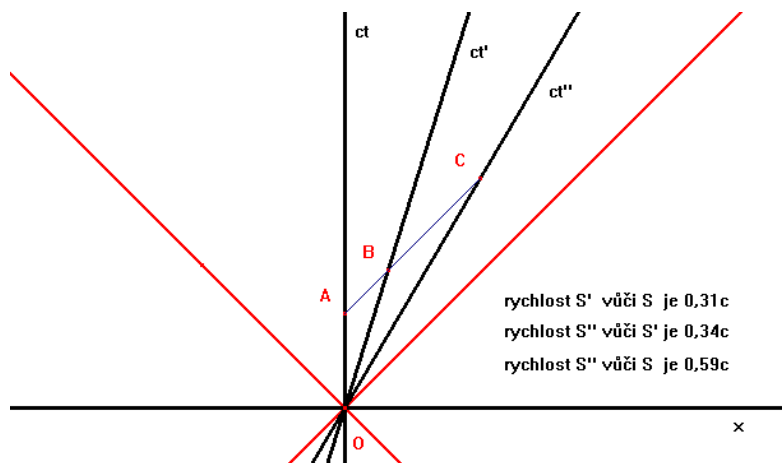
Pro celkový čas i s návratem pak dostáváme

$$\begin{aligned} t &= 2 \cdot 4,4 \doteq 8,8 \text{ let ,} \\ t' &= 2 \cdot 1,232 \doteq 2,5 \text{ let .} \end{aligned}$$

Výsledkem takovéto cesty bude, že syn zestárne o 8,8 let a otec zestárne jen o 2,5 roku.

3.6 Skládání rychlostí

Skládání rychlostí odvodíme z obrázku 3.6 na základě Bondiho k -faktoru velmi snadno.



Obrázek 3.6: Dva cestovatelé pohybující se rychlostmi v_1 a v_2

Na obrázku 3.6 jsou dva cestovatelé, kteří se pohybují různými rychlostmi vůči pozorovateli. Pozorovatel v čase T_0 vyslal světelný signál k oběma cestovatelům. Vyslání signálu je na obrázku zobrazeno jako událost **A**, která nastala v soustavě **S**, a která je k oběma cestovatelům v relativním klidu.

Pro přehlednost si označme T_0 jako velikost intervalu mezi událostmi **O** a **A** v soustavě **S**, T_1 jako velikost intervalu mezi událostmi **O** a **B** v soustavě **S'** a T_2 jako velikost intervalu mezi událostmi **O** a **C** v soustavě **S''**.

První cestovatel v soustavě **S'**, pohybující se relativní rychlostí v_{01} vůči soustavě **S** ve směru osy **x**, signál zaznamenal jako událost **B** v čase $T_1 = k_{01}T_0$.

Druhý cestovatel v soustavě **S''**, pohybující se relativní rychlostí v_{02} vůči soustavě **S** ve směru osy **x**, signál zaznamenal jako událost **C** v čase $T_2 = k_{02}T_0$.

Z pohledu cestovatele v soustavě **S'** však situace vypadá tak, že paprsek k druhému cestovateli v soustavě **S''** dorazil v čase $T_2 = k_{12}T_1$. Tento cestovatel se vůči cestovateli v soustavě **S'** pohyboval rychlostí v_{12} .

Z obrázku 3.6 je vidět, že mezi těmito událostmi je vztah

$$k_{02} = k_{01}k_{12} . \quad (3.29)$$

Protože podle 3.5 platí

$$\begin{aligned} k_{01}^2 &= \frac{c + v_{01}}{c - v_{01}} , \\ k_{02}^2 &= \frac{c + v_{02}}{c - v_{02}} , \\ k_{12}^2 &= \frac{c + v_{12}}{c - v_{12}} , \end{aligned}$$

dostáváme po úpravě vztah pro rychlost cestovatele v soustavě **S''** ve tvaru

$$\boxed{v_{02} = \frac{v_{01} + v_{12}}{1 + \frac{v_{01}v_{12}}{c^2}}} . \quad (3.30)$$

Poznámka 16 Předchozí úpravu doporučuji si udělat jako matematické cvičení.

3.6.1 Skládání rychlostí bez použití k -faktorů – doplnění

O něco složitější odvození je odvození pomocí hyperbolických funkcí. Toto odvození však vyžaduje znalosti, které obvykle studenti středních škol nemají, je však ukázkou elegantní práce s exponenciálními funkcemi v komplexní rovině. Uvádím ho zde jen jako motivaci (a možná i jako odstrašující příklad čeho se lze v matematice nadát).

Poznámka 17 Vztahy pro hyperbolické funkce jsou následující

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -i \cdot \sin(ix) , \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos(ix) , \\ \operatorname{tgh}(x) &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -i \cdot \operatorname{tg}(ix) , \\ \operatorname{cotgh}(x) &= \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = i \cdot \operatorname{cotg}(ix) ,\end{aligned}$$

a vztah pro součet argumentů hyperbolické funkce tangens je

$$\operatorname{tgh}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y}{1 \pm \operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{tgh} y} . \quad (3.31)$$

Označme si rychlosti a události stejným způsobem, jako bylo výše zmíněno.

Při odvozování vztahu pro skládání rychlostí můžeme vycházet z rovnic 3.14, neboť rovnice 3.14 připomínají transformaci soustavy S_0 v pootočenou soustavu S_1 . Použijme substituci

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \cosh \alpha , \quad \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \sinh \alpha .$$

Pak dostáváme rovnice 3.8 a 3.10 ve tvaru

$$\begin{aligned}x' &= x \cdot \cosh \alpha - ct \cdot \sinh \alpha , \\ y' &= y , \\ z' &= z , \\ ct' &= -x \cdot \sinh \alpha + ct \cdot \cosh \alpha .\end{aligned}$$

Použijeme-li nyní označení

$$\operatorname{tgh} \alpha_1 = \frac{v_{01}}{c} , \quad \operatorname{tgh} \alpha_2 = \frac{v_{12}}{c} , \quad \operatorname{tgh} \alpha = \frac{v_{02}}{c} ,$$

pak z předchozích rovnic podle 3.31 dostaneme

$$\operatorname{tgh} \alpha = \frac{\operatorname{tgh} \alpha_1 + \operatorname{tgh} \alpha_2}{1 + \operatorname{tgh} \alpha_1 \cdot \operatorname{tgh} \alpha_2} .$$

Po dosazení rychlostí za hyperbolické funkce dostáváme výsledný vzorec pro skládání rychlostí ve tvaru

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} .$$

3.7 Relativistická dynamika

3.7.1 Relativistická hmotnost

Pro odvození vztahu pro hmotnost dvou částic v různých soustavách uvažujme dokonale nepružnou centrální srážku dvou stejně hmotných částic **A** a **B** (Tolmanovo–Lewisovo odvození).

Poznámka 18 *Zdůrazněme, že odvození platí pro volnou částici. Navíc zde uvažujeme, že rychlost nezávisí na směru nárazu částic, to proto, že soustavy si vždy můžeme zvolit tak, aby se částice srazily ve směru os x zvolených soustav. To je zajištěno následujícími předpoklady.*

Situaci před rázem a po rázu popíšeme nejprve vzhledem k inerciální vztažné soustavě **S'** s počátkem ve hmotném středu této dvojice částic. Této soustavě budeme říkat těžišťová soustava. Po tomto popisu popíšeme situaci vzhledem k inerciální vztažné soustavě **S**, jejíž počátek je před rázem v místě jedné z částic. Soustavě **S** budeme říkat laboratorní soustava. Dále uvažujme, že soustava **S'** se vůči **S** pohybuje rychlostí v ve směru osy x .

Ve vztažné soustavě **S'** nechť má částice **A** rychlost $v'_A = v$ a částice **B** rychlost $v'_B = -v$. Ze zákona zachování hybnosti pak bude platit, že po srážce se obě částice spojí v jedinou částici, která bude v klidu.

Ve vztažné soustavě **S** je situace poněkud složitější. Jedna z částic je před rázem v počátku vztažné soustavy **S** v klidu, proto její rychlost bude $v_B = 0$. Druhá částice se však pohybuje. Protože má platit, že soustava **S'** se vůči **S** pohybuje rychlostí v , pak pro rychlost této částice ze vztahu 3.30 platí

$$v_A = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}.$$

Pro hybnosti **před srážkou** dostáváme dosazením do zákona zachování hybnosti vztah

$$m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B = \frac{2m_A v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}, \quad (3.32)$$

kde m_A je hmotnost nalétávající částice a hmotnost m_B je hmotnost částice, která je v klidu.

Poznámka 19 *Hmotnosti m_B se říká klidová hmotnost.*

Vzhledem k tomu, že po rázu se obě částice budou pohybovat rychlostí v , pak by jejich výsledná hybnost podle klasické mechaniky měla být $2mv$, což by však neodpovídalo pravé straně rovnice 3.32.

Tudíž budeme předpokládat, že hmotnost je závislá na rychlosti. Pro hybnosti částic **po srážce** pak dostáváme vztah

$$(m_A + m_B)v, \quad (3.33)$$

Porovnáním hybností před srážkou a po srážce dostáváme

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} .$$

Protože platí

$$\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} ,$$

dostaneme pro hmotnosti v soustavě **S** po odvození ze zákona zachování hybnosti výsledný vztah

$$m_A = \frac{m_B}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} .$$

Po malé úpravě pak dostáváme běžnější vyjádření ve tvaru

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\frac{2k_1}{k_1^2 + 1}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ,} \quad (3.34)$$

kde m je hmotnost tělesa (částice) pohybující se rychlostí v a m_0 je hmotnost tělesa, které je v klidu.

Vztah 3.34 můžeme popsat jako: **Je-li vzájemná relativní rychlost částic A a B v soustavě S' rovna $2v$, pak v soustavě S díky druhému principu relativity bude vzájemná relativní rychlost menší než $2v$. Aby v obou soustavách byl platný zákon zachování hybnosti, musí v soustavě S dojít ke zvětšení hmotnosti nalétávající částice v závislosti na její nalétávající rychlosti.**

3.7.2 Ekvivalence hmotnosti a energie

Velmi často se v souvislosti se speciální teorií relativity mluví o tom, že hmotnost je ekvivalentní energii. To znamená, že existuje vztah mezi hmotností a energií. Tento vztah je dán vzorcem pro klidovou energii

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 . \quad (3.35)$$

Pokud těleso není v klidu, tak jeho celková energie bude dána vztahem

$$\boxed{E = m \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\frac{2k}{k^2 + 1}} ,} \quad (3.36)$$

kde m_0 je klidová hmotnost, v je rychlost pohybu daného hmotného tělesa vůči pozorovateli a k Bondiho k -faktor příslušející rychlosti v .

Konečně kinetická energie je dána jako rozdíl celkové energie a klidové energie

$$\boxed{E_k = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{2k}{k^2 + 1} - 1 \right) .} \quad (3.37)$$

Tyto vzorce lze odvodit ze zákona zachování hybnosti, ale pro jejich složitější odvozování je zde neuvádím.

3.8 Řešené příklady

Příklad 3 Při srážkách částic primárního kosmického záření s atomy vrchní vrstvy atmosféry vznikají miony μ^- . Jsou to nestabilní částice se střední dobou života $t_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s (měřenou v klidové soustavě mionu) a s klidovou hmotností $m_0 = 207 m_e$ (m_e je hmotnost elektronu). Pozorování pomocí stratosférických balónů a raket ukázala, že miony vznikají ve velkých výškách nad povrchem Země (více než 10 km) a odtud se pohybují k Zemi rychlostí blízkou rychlosti světla. Za střední dobu života se mion již rozpadá na elektron a dvě neutrino. Předpokládejme, že mion vznikl ve výšce 15 km a pohybuje se k Zemi rychlostí $v = 0,9998c$.

1. Může tento mion doletět na povrch Země?
2. Jakou hmotnost má mion při průletu atmosférou vzhledem k pozorovateli na povrchu Země?
3. Kolik energie by se uvolnilo anihilací mionu μ^- s mionem μ^+ , pokud by oba byly v klidu?

Pokud bychom neuvažovali dilataci času, pak by vzdálenost, kterou mion urazí, byla

$$s' = v \cdot t_0 = 0,9998 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6} \doteq 660 \text{ m} .$$

Pro pozorovatele na povrchu Země však bude střední doba života mionu dána vztahem 3.22. Střední doba života tak bude

$$t' = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{2,2 \cdot 10^{-6}}{1 - 0,9998^2} \doteq 0,11 \text{ ms} .$$

Pro dráhu, kterou za tuto dobu mion urazí z pohledu pozorovatele na povrchu Země, dostaneme

$$s' = v \cdot t' = 0,9998 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 0,11 \cdot 10^{-3} \doteq 33 \text{ km} .$$

Odpovědí na první otázku bude, že mion na povrch Země doletí.

Pro výpočet hmotnosti vzhledem k pozorovateli na Zemi dosadíme do vztahu 3.34. Mion tak bude mít hmotnost

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \doteq 10350 m_e \doteq 5,7 m_p ,$$

kde m_p je hmotnost protonu.

Po dosažení hmotnosti dvou mionů do vztahu 3.36 dostáváme energii, která se uvolní při anihilaci, a ta bude

$$E_0 = 2 \cdot m_0 \cdot c^2 = 2 \cdot 207 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \doteq 3,4 \cdot 10^{-10} \text{ J} .$$

Příklad 4 Při zkoumání elementárních částic se užívá urychlovačů, v nichž se střetávají svazky protonů, elektronů či iontů hélia. Hmotnosti těchto částic jsou následující: hmotnost elektronu je $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg, hmotnost protonu je $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}$ kg, hmotnost hélia je $m_{He} = 6,648 \cdot 10^{-27}$ kg. Náboj elektronu je $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C.

1. Vyjádřete hmotnost elektronu a protonu v elektronvoltech [eV].
2. Určete vztah pro rychlost nabitě částice, která byla urychlená v urychlovači napětím 10 MV. Jakou bude mít rychlost elektron proton a iont hélia při tomto napětí?
3. Při jaké rychlosti bude mít elektron stejnou hmotnost jako proton? Jakou energii musí být urychlen?
4. Při jaké rychlosti bude mít proton stejnou hmotnost jako ion hélia? Jakou energii musí být urychlen?

Pro vyjádření hmotnosti v elektronvoltech použijeme vztah pro relativistickou energii 3.36. Po vynásobení energie nábojem částice dostaneme hmotnost vyjádřenou v elektronvoltech a ta bude následující

$$\frac{m_e \cdot c^2}{e} = \frac{9,109 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{1,602 \cdot 10^{-19}} \doteq 512 \text{ keV} ,$$

$$\frac{m_p \cdot c^2}{e} = \frac{1,673 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{1,602 \cdot 10^{-19}} \doteq 940 \text{ MeV} .$$

Rychlost nabitě částice bude dána rovností kinetické energie 3.37 a práce, kterou vykoná náboj v poli o daném napětí. Vztah pro rychlost nabitě částice bude

$$e \cdot U = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) .$$

Po malé úpravě dostaneme

$$\beta_{He} = \frac{v}{c} = \frac{e^2 \cdot U^2 + 2e \cdot U \cdot m_0 \cdot c^2}{(e \cdot U + m_0 \cdot c^2)^2} \doteq 0,0053c ,$$

$$\beta_p = \frac{v}{c} = \frac{e^2 \cdot U^2 + 2e \cdot U \cdot m_0 \cdot c^2}{(e \cdot U + m_0 \cdot c^2)^2} \doteq 0,021c ,$$

$$\beta_e = \frac{v}{c} = \frac{e^2 \cdot U^2 + 2e \cdot U \cdot m_0 \cdot c^2}{(e \cdot U + m_0 \cdot c^2)^2} \doteq 0,9976c .$$

Odpověď na třetí a čtvrtou otázku odvodíme z rovnice 3.34, po úpravě dostáváme

$$\beta_e = \sqrt{1 - \left(\frac{m_e}{m_p} \right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{9,109 \cdot 10^{-31}}{1,673 \cdot 10^{-27}} \right)^2} \doteq 0,99999985c ,$$

$$\beta_p = \sqrt{1 - \left(\frac{m_p}{m_{He}} \right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1,673 \cdot 10^{-27}}{6,648 \cdot 10^{-27}} \right)^2} \doteq 0,9678c .$$

Odpovídající energie na urychlení částic vypočteme dosazením do 3.37 a dostaneme

$$E_e = m_e \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} - 1 \right) \doteq 1,496 \cdot 10^{-10} \text{ J} \doteq 934 \text{ MeV} ,$$

$$E_p = m_e \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} - 1 \right) \doteq 4,476 \cdot 10^{-10} \text{ J} \doteq 2,8 \text{ GeV} .$$

3.9 Paradoxy

3.9.1 Paradox dvojčat

Příklad 5 *Alfréd a Břeťa jsou jednovaječná dvojčata a celý život vyrůstali spolu. Rozloučili se teprve v dospělosti, kdy Břeťa vyrazil na průzkum vesmíru v kosmické lodi a Alfréd zůstal na Zemi. Protože předpokládáme, že se kosmická loď pohybuje rychlostí srovnatelnou s rychlostí světla, bude třeba vzít do úvahy relativistické jevy.*

Díky těmto jevům bude Břeťa během cesty stárnout pomaleji než Alfréd. Po návratu Břeťi zpět na Zemi bude Alfréd starší.

Toto tvrzení odpovídá dilataci času a není zde žádný problém. Paradox se objeví až v okamžiku, kdy dvojče v raketě učiní chybnou úvahu: *Podle teorie relativity je veškerý pohyb relativní. Během své cesty jsem pozoroval, že se Země ode mě vzdaluje určitou rychlostí, pak se otočila a začala se ke mně vracet. Hodiny umístěné na Zemi jdou pomaleji než hodiny, které si vezu s sebou, a můj sourozenec proto musí být po mém návratu mladší než já. A vůbec, jak může být můj bratr vůči mně starší i mladší zároveň?*

Doplňme uvedený příklad o některé pomocné údaje. Dejme tomu, že Břeťa se vydá v roce 2200 na cestu vesmírem v raketě, jejíž rychlost bude $240000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Jako cíl cesty si vybere hvězdu, která je vzdálená 8 světelných let, tam se otočí a poletí zpět.

Období zrychlování a brzdění budeme pro jednoduchost považovat za okamžiky, navíc budeme předpokládat, že ihned po přiletu na hvězdu se Břeťa vydá na cestu zpět. Tato zjednodušení celkové výsledky neovlivní a velmi nám náš příklad zpřehlední. Nejprve vypočítáme celkovou délku cesty. Urazit osm světelných let zabere při 80 procentech rychlosti světla deset let. Alfréd proto na Zemi zjistí, že se Břeťa vrátí v roce 2220. Pro Břeťu však uplyne jen dvanáct let, jeho hodiny umístěné v raketě to potvrdí, budou ukazovat rok 2212.

Paradox je v našem případě tento:

Břeťův čas plynul z pohledu Země pomaleji, tudíž by měl být po návratu mladší než Alfréd, jinak řečeno Břeťovy hodiny by měly ukazovat méně.

Z pohledu rakety se však pohybovala Země, takže by měl Břeťa po návratu zjistit, že je starší než Alfréd, jinak řečeno Alfrédovy hodiny by měly ukazovat méně.

Oba výklady však samozřejmě nemohou platit současně, Břeťa zajisté nemůže být po návratu současně starší i mladší než Alfréd.

Předpokládejme, že obě naše dvojčata jsou vybavena obrovskými dalekohledy, takže každé z nich může pozorovat hodiny toho druhého.

Ještě před tím, než si porovnáme to, co uvidí oba sourozenci, řekněme si, co by měli teoreticky vidět.

Podle speciální teorie relativity by měli spatřit, že hodiny, na které se dívají během Břetovy cesty, by měly jít o 60 procent pomaleji než jejich vlastní hodiny. Ve skutečnosti však zjistí, že jdou ještě pomaleji. Způsobuje to Dopplerův jev.

Navíc neuvidí události takové, jaké jsou nyní, ale takové, jaké byly, když místo, ve kterém události vznikly, opustilo příslušné světlo. V průběhu vzdalování od sebe se budou dozvídat o událostech se zvětšujícím se zpožděním, protože doba, kterou bude to které příslušné světlo putovat, se bude neustále prodlužovat. Připočítáním Dopplerova jevu k jevu dilatace času dostaneme celkový součinitel zpomalování. Jelikož je tato situace symetrická, bude souhrnný součinitel zpomalování stejný jak pro Břetu tak i pro Alfréda.

Protože oba se shodnou na tom, že Břeta se vydá na cestu, ještě před cestou si spočítají, že cesta ke hvězdě by Břetovi měla trvat 6 let.

Břetův pohled.

Břeta odlétá pryč do vesmíru a pozoruje dalekohledem Alfrédovy hodiny. Břeta vidí, že Alfrédovy hodiny jsou vlivem dilatace času a Dopplerova jevu zpomaleny. Žádný div, říká si Břeta, vždyť Země se ode mě vzdaluje.

Břeta přiletá podle svých hodin v roce 2206 ke hvězdě. Kouká do dalekohledu a zjišťuje, jaký je rok na Zemi. V souřadnicové soustavě Země nastala událost příletu v roce 2210, Břeta však spatří Zemi v době před osmi lety. Uvidí, jak pozemské hodiny ukazují rok 2202. Břeta se proto dozví, že za jeho šest let cesty uplynuly na Zemi pouhé dva roky a spočítá si, že Alfrédovy hodiny šly jen třetinovou rychlostí vůči jeho vlastním hodinám. Břeta však dokáže oddělit vlivy dilatace času a Dopplerova jevu, a tak odvodí skutečnou rychlost Alfrédových hodin. Ta odpovídá 60procentní rychlosti vůči jeho vlastním hodinám.

Břeta se vydává nazpět. Jelikož se přibližuje k Zemi, působí vliv Dopplerova jevu proti vlivu dilatace času. Kvůli Dopplerově jevu se události zdají být zrychlené, přestože jsou souběžně zpomalovány dilatací času.

Břeta prožije na zpáteční cestě (stejně jako na cestě tam) šest let. Na Zemi se podle svých hodin vrátí v roce 2212.

Když přiletěl ke hvězdě, viděl, jak hodiny na Zemi ukazují rok 2202. Domů se vrátil, když pozemské hodiny ukazovaly rok 2220. Za jeho šest let v raketě uběhlo na zemi osmnáct let. Pozemské hodiny na cestě zpět vypadají tak, jako kdyby šly třikrát rychleji než jeho vlastní hodiny v raketě. Po odpočítání Dopplerova jevu Břeta shledá, že Alfrédovy hodiny šly během jeho cesty 60procentní rychlostí jeho vlastních hodin, tj. stejnou rychlostí, jako v průběhu Břetova vzdalování od Země.

Alfrédův pohled.

Alfréd pozoruje dalekohledem hodiny odlétajícího Břeti. Alfréd vidí, že Břetovy hodiny jsou vlivem dilatace času a Dopplerova jevu zpomaleny. Žádný div, říká si Alfréd, vždyť Břeta přece odlétá ke hvězdě.

Píše se rok 2210, podle hodin na Zemi by měl Břeta být u hvězdy. Alfréd koukne do dalekohledu a co to? Břeta je stále na cestě. Alfréd si vzpomene, že světlo z hvězdy, kam letěl Břeta, k Zemi putuje osm let, a řekne si, že za osm let by měl v dalekohledu vidět svého bratra.

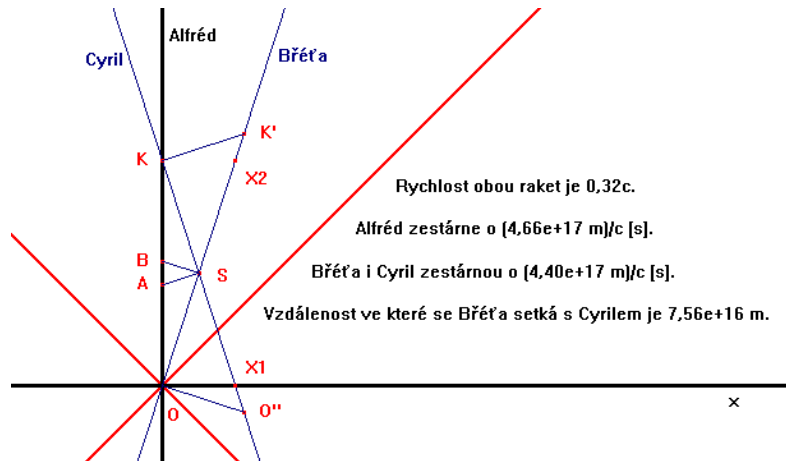
V roce 2218 se Alfréd znovu podívá do dalekohledu a vidí, jak Břěťa šťastně dorazil ke hvězdě. Břěťovy hodiny ukazují rok 2206. Za 18 let na Zemi uplynulo v raketě jen 6 let. Alfréd z toho odvodí, že Břěťovy hodiny šly jen třetinovou rychlostí vůči jeho vlastním hodinám. Alfréd však dokáže oddělit vlivy dilatace času a Dopplerova jevu, a tak vypočítá skutečnou rychlost Břěťových hodin. Ta odpovídá 60procentní rychlosti vůči jeho vlastním hodinám.

Alfrédovi nyní nezbyvá než vyčkat Břěťova příletu. Protože Alfréd viděl, že Břěťa dorazil na hvězdu v roce 2218 a na Zemi dorazil v roce 2220, bude se Alfrédovi zdát, že návrat trval Břěťovi dva roky. V roce 2218 viděl Alfréd, jak Břěťovy hodiny ukazovaly rok 2206, po návratu tytéž hodiny ukazují rok 2212. Tím zjistí, že v průběhu návratu plynul Břěťovi čas třikrát rychleji. Stejně jako Břěťa však Alfréd oddělí Dopplerův jev a odvodí, že hodiny v raketě během cesty šly 60procentní rychlostí chodu jeho pozemských hodin, tj. stejnou rychlostí jako v průběhu Břěťova vzdalování.

Když si později Alfréd s Břěťou vypráví zážitky, shodnou se oba na tom, že po celou dobu cesty pozorovali stejný součinitel zpomalení pozorovaných hodin, a to 60 procent.

Z toho vidíme, že zážitky obou bratří nejsou ani v nejmenším nijak paradoxní, přestože za nimi stojí výrok: „Můj bratr bude vůči mně mladší i starší zároveň.“

Poznámka 20 Při objasnění tohoto paradoxu se velmi často tvrdí, že astronaut se nepohybuje v inerciální vztahné soustavě. Při výpočtech totiž zanedbáváme zrychlování, otočení rakety směrem k Zemi a následné zpomalení. Důsledkem toho je, že na tento příklad musíme aplikovat obecnou teorii relativity. To však není potřeba.



Obrázek 3.7: Prostorčasový diagram pozorovatele a dvou cestovatelů.

Tento paradox lze vysvětlit i v rámci speciální teorie relativity. Předpokládejme ne jednoho cestovatele, ale dva, to abychom se vyhnuli problémům při otáčení. Podle předchozího příkladu uvažujme, že Alfréd zůstává na Zemi, Břěťa odlétá ze Země a Cyril je jejich třetí sourozenec, který se z hlubokého vesmíru vrací zpět na Zemi. Uvažujme, že jak Břěťa, tak Cyril se pohybují směrem k sobě stejnou rychlostí; v nějakém místě se potkají (tam se podle předchozího příkladu Břěťa otácel) a pak letí dál a navíc předpokládejme, že při odletu byli jak Břěťa tak Cyril stejně staří jako Alfréd. Vizte obrázek 3.7.

Pro Alfréda na Zemi pak cestování obou jeho bratří bude vypadat následovně: Při události O Břeťa opouští Zemi a podle Alfréda současně s touto událostí je v místě $X1$ Cyril a ten letí směrem k Zemi. Při události S se Břeťa potká s Cyrilem. Událostí K je označen přílet Cyrila na Zemi.

Pro Břeťu odlétajícího ze Země je situace následující: On ve své raketě bude považovat událost A , která se odehrála na Zemi, současnou s událostí S (setkání se svým bratrem Cyrilem). Cyrilův přílet k Zemi pak pro něho bude současný s událostí K' . Vzdálenost události K' od Země je však mnohem větší než vzdálenost události $X2$ (respektive $X1$) od Země. Proto pro pozorovatele na Zemi bude Břeťa při události K' starší, neboť musel uletět delší vzdálenost. (Poznamenejme, že při události $X2$ bude Břeťa stejně starý jako Alfréd, který zůstal na Zemi. Tento okamžik však nebude Břeťa pokládat za současný s okamžikem příletu Cyrila na Zem.)

Pro Cyrila letícího směrem k Zemi je situace takováto: On se vydává na cestu již při události O' , která se mu jeví jako současná s událostí O , odletu Břeťi ze Země. Cyril tedy po svém příletu na Zemi bude i přes efekt dilatace času stejně starý jako Alfréd, to však jen proto, že musel vyrazit na cestu z Alfrédova pohledu o něco dříve.

Z Alfrédova pohledu se však Cyril vydává na cestu až při události $X1$ a po příletu na Zemi musí být mladší než Alfréd. Ještě poznamenejme, že pro Cyrila by událost B , která nastala na Zemi, byla současná s událostí S (setkání se svým bratrem Břeťou).

Všechny důležité události jsou nakonec vnímány Alfrédem zhruba v tomto pořadí:
Při události O odlétá Břeťa ze Země.

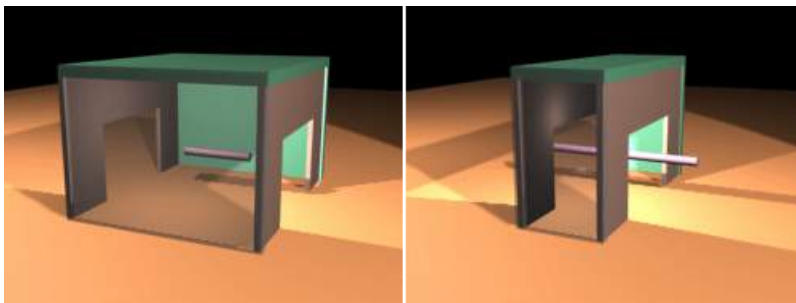
Při události S se Břeťa setkává s Cyrilem. Z pohledu Alfréda by měli být oba stejně staří, ale ve skutečnosti je při setkání Cyril starší než Břeťa. Cyril je totiž o čas daný intervalem XO' déle na cestě.

Z pohledu Břeťi a Cyrila jsou události A a B na Zemi současně. To si můžeme představit tak, že během časového intervalu AB stárne pouze Alfréd na Zemi. Toto je okamžik, který se velmi často přisuzuje vlivu obecné teorie relativity.

Při události K přilétá Cyril na Zemi.

Výsledkem toho je, že hlavní chyba v úvaze je Alfrédovo nerespektování Cyrilovy současnosti. Díky této chybné úvaze se nejedná o žádný prohřešek proti logice.

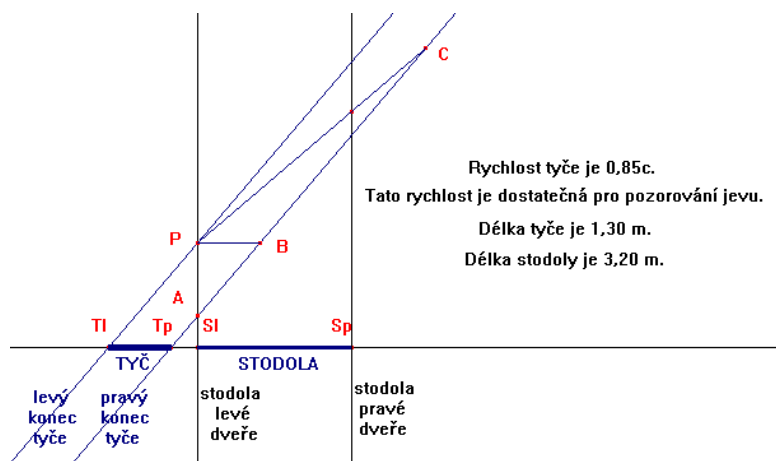
3.9.2 Paradox tyče a stodoly (vlaku a tunelu) či auta a garáže



Obrázek 3.8: Paradox tyče a stodoly (z pohledu stodoly a z pohledu tyče). Převzato z [16]

Příklad 6 Představme si, že máme stodolu a tyč, obojí v klidu. Tyč je kratší než stodola.

Necháme-li tyč projít stodolou a vezmeme-li v úvahu kontrakci délek, zjistíme následující: z pohledu stodoly je tyč zkrácená (kratší než stodola) a po jistou dobu je tedy celá tyč ve stodole. Z pohledu tyče je však zkrácená stodola, což znamená, že tyč se do stodoly nevejde. Vizte 3.8



Obrázek 3.9: Prostorčasový diagram stodoly a tyče.

Tento zdánlivý paradox opět spočívá v podcenění relativity současnosti, stejně jako u předchozího paradoxu dvojčat.

Pro vysvětlení uvažujme, že pozorovatel je u levých dveří do stodoly, vizte obrázek 3.8. Tyč se pohybuje zleva doprava. Nejdříve je tyč celá mimo stodolu, pak pravý konec projde levými dveřmi stodoly a tak dále. Pozorovatel ve stodole pak bude vnímat události, které jsou zaznamenány na prostorčasovém diagramu 3.9.

Světočára **SI** popisuje levé dveře stodoly, kde stojí pozorovatel, světočára **Sp** popisuje pravé dveře stodoly. Světočára **TI** popisuje levý konec tyče a světočára **Tp** popisuje pravý konec tyče. Protože tyč se pohybuje, musí být vůči pozorovateli u levých dveří zkrácena.

Událostí **A** je označeno, kdy pravý konec tyče je v levých dveřích. Událostí **P** je označeno, kdy levý konec tyče prošel levými dveřmi stodoly.

Budeme-li nyní popisovat konce tyče z pohledu pozorovatele stojícího v klidu u dveří stodoly, pak zjistíme, že tyč se do stodoly vejde. Současná vzdálenost konců tyče (události **P** a **B**) je totiž menší než délka stodoly.

Z pohledu pozorovatele, který se pohybuje stejně rychle jako tyč (třeba na ní sedí), bude délka tyče udána vzdáleností současných událostí **P** a **C**. Tento pozorovatel zjistí, že tyč je delší než stodola. (Častěji mluvíme o tom, že pozorovatel uvidí délku tyče stále stejnou, ale stodola se zkrátí.)

3.9.3 Řešení paradoxů

Dále si dovoluji citovat z literatury [8].

„Neobvyklost kinematických zákonitostí speciální teorie relativity, které zdánlivě odporují „zdravému rozumu“, vyvolávala (a v laické veřejnosti vyvolává někdy i dnes) řadu námitek formulovaných pomocí „paradoxů“, z nichž

nejznámější je paradox hodin (paradox dvojčat). Všechny tyto paradoxy vznikají chybným nebo nedůsledným použitím zákonitostí STR (nejčastěji se zapomíná na relativnost současnosti); část úvahy se provede relativisticky, část klasicky: a vznikne rozpor. Nyní jsou již paradoxy tohoto druhu spolehlivě vyřešeny.

STR není teorií „selského rozumu“, avšak - ať se to komukoli líbí či nelíbí - popisuje vlastnosti skutečného prostoročasu, v němž žijeme. Lze říci, že tato teorie představuje vítězství skutečného objektivního rozumu nad tzv. „selským rozumem“, vycházejícím z omezené zkušenosti každodenního života lidí.

V popularizační literatuře se občas tvrdí, že k řešení paradoxu dvojčat je třeba použít obecnou teorii relativity, neboť vztažná soustava cestovatele je neinerciální: že příslušný časový rozdíl vzniká právě ve fázi brzdění a opačného urychlování pohybu druhého pozorovatele. Toto tvrzení je zavádějící a nepřesvědčivé; ve skutečnosti lze paradox dvojčat korektně vyřešit v rámci samotné speciální teorie relativity s použitím tří inerciálních vztažných soustav: klidové soustavy prvního pozorovatele a dvou rozdílných pohybujících se soustav druhého pozorovatele při pohybu tam a pak zpět.“

Poznámka 21 Je s podivem, že jistý autor (raději ho nebudu uvádět, abych mu neudělal ostudu) se zabýval Paradoxy teorie relativity a jejich důsledky tak urputně, že pro rychlost světla zavedl dvě různé hodnoty. Kromě toho zavedl éter, který se sice nedá nijak změřit ani zjistit, ale tento autor je zcela přesvědčen, že existuje. V článku, který jsem četl, si stěžoval na to, že je velmi smutný, že ani po několika letech se mu nezdařilo podat přesvědčivý důkaz svého éteru.

No upřímně si myslím, že je to velký nešťastník, protože ve škole zřejmě nedával moc velký pozor.

3.10 Příklady na procvičení

3.10.1 Dilatace času

Příklad 7 Určete periodu a frekvenci světelných hodin o délce $l_0 = 5$ cm:

a) v jejich klidové inerciální soustavě K' ,

b) v inerciální vztažné soustavě K , vzhledem k níž se hodiny pohybují rychlostí $0,7c$.

$$[T_0 = 3,33 \cdot 10^{-10} \text{ s}, f_0 = 3 \text{ GHz}, T = 4,66 \cdot 10^{-10} \text{ s}, f = 2,14 \text{ GHz}]$$

Příklad 8 Kosmonaut vyřešil určitý matematický úkol na Zemi za 10 min. Za jakou dobu by vyřešil tento úkol též kosmonaut na kosmické lodi pohybující se vzhledem k Zemi rychlostí o velikosti $v = 0,97c$?

Jak dlouho řešil tuto úlohu kosmonaut na kosmické lodi z hlediska pozorovatele na Zemi?

$$[t_0 = 10 \text{ min}; t = 41,1 \text{ min}]$$

Příklad 9 V kosmické lodi pohybující se rychlostí $v = 2,6 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ vzhledem k Zemi, probíhal určitý děj. Podle hodin pozorovatele na Zemi trval tento děj 5 min. Jaký je vlastní čas uvažovaného děje?

$$[t_0 = 2,5 \text{ min}]$$

Příklad 10 V laboratoři bylo zjištěno, že střední doba života částic pohybujících se rychlostí $0,96c$ je $1,0$ ns. Jaká je střední doba života částic v jejich klidové soustavě?
 $[t_0 = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ s }]$

Příklad 11 V kosmické lodi pohybující se vzhledem k Zemi probíhal děj, který pro pozorovatele na lodi trval t_0 . Pro pozorovatele na Zemi trval děj probíhající na kosmické lodi dvojnásobnou dobu $2t_0$. Jakou rychlostí se pohybuje kosmická loď vzhledem k Zemi?
 $[\text{přibližně } v = 2,6 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$

Příklad 12 Cestující v letadle odlétal z Prahy v 10:00. Po přesně osmihodinovém letu přistál v New Yorku. Jaký je relativistický rozdíl časů jeho hodinek a letištních hodin v New Yorku? Uvažujte, že letadlo letělo průměrnou rychlostí 300 km/hod .
 $[\Delta t = 3,09 \cdot 10^{-13} \text{ hod} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ s }]$

3.10.2 Kontrakce délky

Příklad 13 Tyč o klidové délce 5 m se pohybuje vzhledem k pozorovateli ve směru své podélné osy rychlostí $2 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jakou délku tyče pozorovatel naměří?
 $[l = 3,73 \text{ m}]$

Příklad 14 Jakou rychlostí se vzdaluje od Země raketa, jestliže pro pozorovatele na Zemi je její délka ve srovnání s délkou klidovou třetinová?
 $[v = 0,9428c]$

Příklad 15 Koule o poloměru r_0 se vzdaluje od pozorovatele rychlostí $0,5c$. Určete poměr délek jejího podélného a příčného průměru.
 $[\text{poměr bude } 0,866]$

Příklad 16 Proton proletěl v laboratoři trubkou o délce 12 cm za dobu $5 \cdot 10^{-10} \text{ s}$. Určete délku této trubky v klidové soustavě protonu.
 $[7,2 \text{ cm }]$

Příklad 17 Kosmická loď se vzdaluje od Země rychlostí, při níž relativistické zkrácení její vlastní délky je vzhledem k pozorovateli na Zemi 5% . Na kosmické lodi probíhá určitý děj trvající podle palubních hodin 10 min . Jak dlouho trvá tento děj z hlediska pozorovatele na Zemi?
 $[10 \text{ min } 31 \text{ s }]$

Příklad 18 Kosmická loď se pohybuje rychlostí $v = 0,98c$ k hvězdě vzdálené od Země $3 \cdot 10^{18} \text{ m}$.

- Jaká je vzdálenost mezi hvězdou a lodí z hlediska pozorovatele na lodi?
 - Jak dlouho trvá tento let, použijeme-li k měření času hodiny umístěné na Zemi?
 - Jak dlouho trvá tento let podle hodin umístěných na lodi?
- $[\text{a) } 5,97 \cdot 10^{17} \text{ m, b) } 10^{10} \text{ s, c) } 2 \cdot 10^9 \text{ s.}]$

Příklad 19 Jak se díky kontrakci délek zkrátí auto Audi R7 6.3 HDT při rychlosti 72 km/hod ? (Audi R7 6.3 HDT má délku 5 m).
 $[\Delta l = 1 \cdot 10^{-14} \text{ m }]$

3.10.3 Skládání rychlostí

Příklad 20 Kosmická loď vzdalující se od Země rychlostí $225\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ má na palubě urychlovač, který urychluje elektrony na rychlost $240\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ (vzhledem k lodi). Jaká je rychlost těchto elektronů vzhledem k Zemi, jestliže se pohybují

a) ve směru pohybu kosmické lodi,

b) proti směru pohybu lodi?

[a) $291\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, b) $-37\,500\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$]

Příklad 21 Pozorovatel pohybující se vzhledem k inerciální soustavě \mathbf{K} ve směru osy x rychlostí $2,9 \cdot 10^8\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ měřením zjistil, že se v opačném směru osy x vzdaluje od něho těleso rychlostí $2,998 \cdot 10^8\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jaká je rychlost tohoto tělesa v soustavě \mathbf{K} ?

[$-2,88 \cdot 10^8\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$]

Příklad 22 Z kosmické lodi pohybující se vzhledem k Zemi rychlostí $0,6c$ byla ve směru jejího pohybu vypuštěna raketa rychlostí $0,5c$ (vzhledem k lodi). Vlastní délka rakety je 20 m . Jaká je délka této rakety

a) z hlediska pozorovatele v kosmické lodi,

b) z hlediska pozorovatele na Zemi?

[a) $17,32\text{ m}$, b) $10,66\text{ m}$]

Příklad 23 Na kosmické lodi (vizte předcházející příklad) probíhal děj, který podle pozorovatele na lodi trval 10 min . Jak dlouho trval tento děj

a) z hlediska pozorovatele na Zemi,

b) z hlediska pozorovatele na raketě?

[a) $16,7\text{ min}$, b) $12,5\text{ min}$]

Příklad 24 Z rakety, která se vzhledem k zemi pohybuje rychlostí $v = 0,7c$, byl ve směru jejího pohybu vyslán laserový světelný impuls. Jaká je jeho rychlost vzhledem k Zemi?

[c]

3.10.4 Relativistická dynamika

Příklad 25 Určete rychlost, při níž je relativistická hybnost částice dvakrát větší než hybnost vypočtená podle klasické fyziky.

[$v = 2,6 \cdot 10^8\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$]

Příklad 26 Těleso o klidové hmotnosti 2 kg se vzhledem k soustavě \mathbf{K}' pohybuje ve směru osy x' rychlostí $\frac{3}{5}c$. Soustava \mathbf{K}' se vzhledem k jiné inerciální soustavě \mathbf{K} pohybuje ve směru osy x' rychlostí $\frac{1}{2}c$.

Určete hmotnost a hybnost tělesa v soustavách \mathbf{K}' a \mathbf{K} .

[\mathbf{K}' : $2,5\text{ kg}$; $4,5 \cdot 10^8\text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, \mathbf{K} : $3,75\text{ kg}$; $9,53 \cdot 10^8\text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$]

Příklad 27 Proton se vzhledem k dané vztažné soustavě pohybuje rychlostí o velikosti $2,4 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Určete v této vztažné soustavě jeho relativistickou hmotnost.

$$[2,79 \cdot 10^{-27} \text{ kg }]$$

Příklad 28 Určete poměr relativistické a klidové hmotnosti částice pohybující se rychlostí jen o 0,01% menší než světlo ve vakuu.

$$[70,7]$$

Příklad 29 Při jaké rychlosti částice je její relativistická hmotnost o 1% větší než hmotnost klidová?

$$[v = 0,14c]$$

Příklad 30 Těleso se vzhledem k dané vztažné soustavě pohybuje rychlostí $0,8c$.

Určete poměr mezi jeho hustotou v této vztažné soustavě a jeho hustotu klidovou.

$$[2,78]$$

Příklad 31 Jaký by byl poměr mezi relativistickou a klidovou hmotností tělesa, jestliže by těleso pohybující se vzhledem k soustavě \mathbf{K} mělo hypoteticky všechny rozměry ve směru pohybu dvakrát menší než totéž těleso, které je v soustavě \mathbf{K} v klidu?

$$[2]$$

Příklad 32 Jakou rychlostí se pohybuje částice, jestliže její celková energie je dvojnásobkem její energie klidové?

$$[v = 0,87c]$$

Příklad 33 Jakou rychlost získá elektron, je-li urychlen napětím 10^6 V ?

Jakou rychlost by v tomto případě získal elektron podle zákonů klasické fyziky?

Náboj elektronu $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

$$[v = 2,83 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, v_{kl} = 5,93 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

3.10.5 Energie a hmotnost

Příklad 34 Pružinu, která má tuhost $10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, prodloužíme o 3 cm. Jaký bude přírůstek její hmotnosti?

$$[5 \cdot 10^{-17} \text{ kg }]$$

Příklad 35 Určete přírůstek hmotnosti jednoho litru vody při ohřátí z 0°C na 100°C . Měrná tepelná kapacita vody je $4,2 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

$$[5 \cdot 10^{-12} \text{ kg }]$$

Příklad 36 Led o teplotě 0°C a hmotnosti 1 kg se táním přeměnil na vodu téže teploty. Určete rozdíl mezi hmotností vody a hmotností ledu.

Měrné skupenské teplo tání ledu je $334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

$$[3,7 \cdot 10^{-12} \text{ kg }]$$

Příklad 37 Voda o hmotnosti 1 kg se při teplotě 100°C beze zbytku přeměnila na vodní páru téže teploty.

Měrné skupenské teplo vypařování vody je $l_v = 2,26 \text{ MJ} \cdot \text{Kg}^{-1}$. Určete přírůstek hmotnosti páry při tomto ději.

$$[2,5 \cdot 10^{-11} \text{ kg}]$$

Příklad 38 Těleso má klidovou hmotnost $m_0 = 1 \text{ kg}$. Určete jeho klidovou energii a porovnejte ji s energií, která se uvolní dokonalým spálením 1 kg uhlí o výhřevnosti $H = 3 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

$$[E_0 = 9 \cdot 10^{16} \text{ J}, E = 3 \cdot 10^7 \text{ J}, \frac{E_0}{E} = 3 \cdot 10^9]$$

Literatura

- [1] BARTUŠKA, Karel. *Deset kapitol ze speciální teorie relativity*. 1. vyd. Praha: SPN, 1980. 240 s. Škola mladých fyziků, Státní pedagogické nakladatelství n.p., Praha. Publikace č. 9-42-17/1.
- [2] BONDI, Hermann. *Assumptions and Myths in Physical Theory*. Poslední revize 2002 [citováno 2009-02-01]. Dostupné z <http://www.geocities.com/ResearchTriangle/System/8956/Bondi/>.
- [3] BONDI, Hermann. *Relativity and Common Sense: A New Approach to Einstein*. New York: Dover, 1964.
- [4] SVRŠEK, Jiří – BARTOŠ, Roman. *Z historie matematiky a fyziky*. Poslední revize neuvedena [citováno 2008-12-12]. Dostupné z <http://natura.baf.cz/natura/2001/10/20011004.html>.
- [5] CARNAP, R. *An Introduction to the Philosophy of Science*, New York: Dover publications INC., 2008.
- [6] *Euklidovský metrický prostor* [online]. Poslední revize neuvedena [citováno 2007-12-28]. Dostupné z <http://old.mendelu.cz/~MARIK/in-mat-web/in-mat-webse1.html>.
- [7] GAMOW, George. *Pan Tompkins v říši divů*. Přeložil J. Bičák – J. Klíma. Praha: Mladá Fronta, 1986.
- [8] *Gravitace a její místo ve fyzice*. [monografie online]. Poslední revize neuvedena [citováno 2009-20-03]. Dostupné z <http://astronuklfyzika.cz/Gravitace1-6.htm>.
- [9] HOLEČEK, M. Otočená šipka času. *Vesmír* [online]. Listopad 2002, Vol. 81. [citováno 2007-09-14]. Dostupné z <http://www.vesmir.cz/clanky/clanek/id/2562>. s. 613-615, počet stran časopisu. ISSN 1214-4029.
- [10] HORSKÝ, Jan. *Úvod do teorie relativity*. Praha: SNTL, 1975.
- [11] LANDAU, L. D. – LIFŠIC, J. M. *Úvod do teoretické fyziky*, Bratislava: Alfa, 1980.
- [12] MITTELSTRASS, Jürgen. *O Filosofii času*. Přeložila Jana Olivová. Německo: Univerzita v Kostnici. Centrum pro filosofii vědy.

- [13] NOVOTNÝ, Jan, et al. *Základy teorie relativity: Elektronická učebnice pro střední a vysoké školy* [monografie online]. Poslední revize 2006 [citováno 2008-10-09]. Dostupné z <http://is.muni.cz/elportal/?lang=en;id=703391>>. ISSN 1802-128X.
- [14] SALGADO, R. B. *Visualizing proper-time in Special Relativity* [online]. New York: Syracuse University. Department of Physics, 2002. [citováno 2006-12-09]. Dostupné z www.visualrelativity.com/LightClock/VisualizingProperTime-AAPT-01Sum.pdf>.
- [15] *Speciální teorie relativity: diplomová práce Jaroslava Jocha* [monografie online]. Poslední revize 2000 [citováno 2008-11-30]. Dostupné z <http://www.ktf.upol.cz/joch/>>.
- [16] *Teorie relativity on-line učebnice* [monografie online]. Poslední revize 2007 [citováno 2008-7-9]. Dostupné z <http://martin184.webpark.cz>>.
- [17] *Unit of length (metre): SI brochure, Section 2.1.1.1* [online]. Poslední revize neuvedena [citováno 2009-04-12]. Dostupné z http://www.bipm.org/en/si/si_brochure/chapter2/2-1/metre.html>.
- [18] *Unit of time (second): SI brochure, Section 2.1.1.3* [online]. Poslední revize neuvedena [citováno 2009-04-12]. Dostupné z http://www.bipm.org/en/si/si_brochure/chapter2/2-1/second.html>.
- [19] www.plzi.wz.cz.