Modely veličin spojitých v čase – funkce spojité v čase

Základní pojmy

Základní informace

Tato kapitola, je první, která se zabývá konkrétními poznatky, týkajícími se popisem a rozborem vlastností spojitých funkcí, jež je možné využít pro vytváření modelů spojitých veličin. Aby bylo možné patřičně vnímat vše v následném textu vysvětlované, je třeba, aby byl čtenář dostatečně seznámen se základy funkcionální analýzy a také znal základy práce s komplexními čísly (způsob vyjádření, základní matematické operace s nimi [odkaz na text o komplexních číslech]).

Po absolvování této kapitoly by čtenář měl vědět, jaké jsou základní typy funkcí, které vyjadřují vlastnosti experimentálních dat. Podrobnější znalosti by měl mít o harmonické funkci jako nejdůležitější reprezentantce periodických experimentálních průběhů a o různých formách jejího popisu. Měl by znát základní typy jednorázových funkcí. Vedle uvedených základních typů funkcí by měl zvládat elementární unární operace s těmito funkcemi. Ostatně, jak je to všechno uvedeno v odstavci „Výstupy z výuky".

Snad to není zas až tak moc a snad se to povede.

Výstupy z výuky

- seznámit se se základními typy matematických modelů veličin (funkcí) spojitých v čase (jednorázové, periodické, harmonické) a se základními operacemi (unárními, binárními) s nimi;
- na příkladech dokázat zdůvodnit co se s jednotlivými funkcemi při matematických operacích s nimi děje;
- seznámit se s definicí a geometrickým významem konvoluce;
- dokázat spočítat konvoluci zadaných funkcí;
- seznámit se s definicí korelačního koeficientu, korelační funkce, autokorelační funkce, kovarianční funkce a umí vysvětlit vztahy mezi nimi;
- umět vypočítat konvoluci, resp. korelaci dvou či jedné funkce a interpretovat výsledek.

1 Základní typy matematických modelů veličin spojitých v čase

Důležitá poznámka

Budeme-li nadále hovořit o spojitých a diskrétních veličinách a funkcích, budeme tím rozumět spojitost či diskrétnost z hlediska času jako nezávisle proměnné, nikoliv spojitost či diskrétnost z hlediska funkčních hodnot. Nepochybně se tak dopouštíme matematické nekorektnosti, ale z pragmatického pohledu na učel tohoto textu je takto definované dělení dostačující. Abychom si pověst zas až tak nezkazili, budeme tuto skutečnost připomínat alespoň v názvech kapitol.

Významný rozdíl v přístupu i z hlediska kvality výsledků analýzy vyplývá z toho, zda je analyzovaná funkce periodická či nikoliv. Tedy, jaký je mezi nimi rozdíl?

1.1 Periodické funkce

Definice 1.1:

Spojitá jednorozměrná funkce $x_s(t)$ je periodická, když existuje takové číslo $T > 0$, pro které a pro všechny reálné hodnoty t je

$$x_s(t) = x_s(t + kT), \tag{1.1}$$

kde k je libovolné celé číslo. Nejmenší hodnotu T (pokud taková hodnota existuje), pro kterou platí rovnice (1.1) nazýváme základní periodou funkce.

Všechny funkce, které nesplňují vztah (1.1) nejsou periodické, tj. jsou neperiodické.

Také lze použít definice a v dalším textu si takovou představou občas vypomůžeme, že neperiodická funkce je taková periodická funkce, jejíž základní perioda je nekonečná, tj. platí $x(t) = x(t + kT)$ pouze pro $T \to \infty$.

Příklad 1.1:

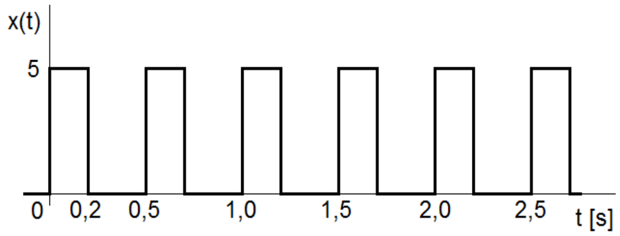
Rozhodněte, zda je funkce (obr.1.1)

$$x_s(t) = \begin{cases} 5, & \text{pro } t \in \langle 0{,}5 \cdot k;\, 0{,}2 + 0{,}5 \cdot k) \quad [\text{s}]; \\ 0, & \text{pro } t \in \langle 0{,}2 + 0{,}5 \cdot k;\, 0{,}5 \cdot (k+1)) \quad [\text{s}], \end{cases} \tag{1.2}$$

kde k je libovolné celé číslo, periodická či nikoliv.

Řešení:

Z definičního vztahu, vyplývá, že každá z obou úrovní funkce $x_s(t)$ se opakuje po 0,5 [s]. Proto je funkce periodická a její základní perioda je 0,5 s.



0br.1.1 Periodický funkce podle vztahu (1.2)

1.1.1. Harmonická funkce

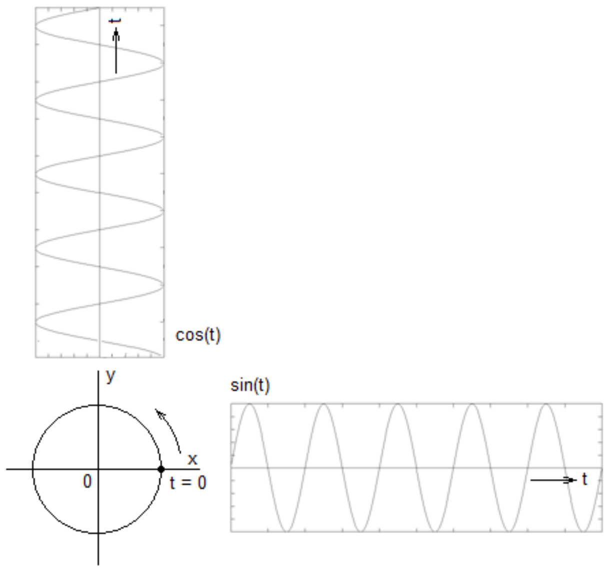
Jednou ze základních forem periodických funkcí je funkce harmonická. Vyjadřujeme ji pomocí goniometrické funkce sin(x) nebo cos(x)[1]. Vzhledem k dalším souvislostem je užitečné zvolit jednu z obou variant jako referenční. Z některých dost dobrých objektivních důvodů, se kterými se seznámíme později, se budeme řídit následující definicí.

[1] Název funkce sinus procházel s vývojem astronomie a matematiky dle teritoria zájmu (Arábie, Indie, ..) až k arabskému *džaib*, což znamenalo ňadra, výstřih, vypuklost, atd. Tento význam pak ve 12. století v podstatě převzala latina, kde slovo *sinus* značí záhyb, oblouk, ohyb, zákrut, ale i splav, případně dutina.

Definice 1.2:

Harmonická funkce je určena vztahem

$$x(t) = A.\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{1.3}$$



Obr.1.2 *Časový rozvoj průmětu kruhového pohybu bodu do os souřadnicového systému*

kde A je kladná reálná konstanta, kterou nazýváme amplitudou[2] harmonické funkce (udáváme ji v jednotkách veličiny, kterou harmonická funkce popisuje), ω je rovněž kladná reálná konstanta, kterou nazýváme úhlovým (kruhovým) kmitočtem (frekvencí[3], rychlostí) (vyjadřujeme jej v rad/s) a φ_0 je reálná konstanta, která určuje posunutí průběhu harmonické funkce vůči počátku, tj. pro okamžik t = 0. Nazýváme ji počáteční fáze a uvádíme ji v úhlových mírách – v radiánech, resp. v úhlových stupních. Celý argument funkce kosinus určuje hodnotu okamžité fáze harmonického funkce.

Poznámka

Nejen dokonalí znalci základů goniometrie určitě ví, že argumentem goniometrických funkcí sinus i kosinus, je úhel. Tato myšlenka je podporována i skutečností, že počáteční fázi φ_0, jedna ze dvou aditivních složek, z nichž se argument funkce kosinus podle vztahu (1.3) skládá, vyjadřujeme v úhlových mírách. Na druhé straně vztah (1.3) definuje harmonickou funkci jako funkci času a na to konto se čas t se také v argumentu vyskytuje. Aby měly oba součtové členy v argumentu funkce kosinus ve vztahu (1.3) úhlový rozměr, má parametr ω rozměr rad/s. Součinem ωt se čas rozměrově eliminuje. Rozměr parametru ω má úzký vztah s jeho označením úhlová rychlost, tedy úhel, který nějaký kruhový pohyb absolvuje za jednotku času.

Zbývá poslední otázka. Jak ten kruhový pohyb souvisí s funkcí kosinus? Odpověď částečně vyplývá z tzv. Eulerových vztahů (1.12), částečně i názorně z průmětů pohybu bodu umístěného na obvodu kruhu se středem v počátku souřadnicové soustavy při jeho otáčení do obou pravoúhlých souřadnicových os, jak je zobrazeno na obr.1.2. Poloměr kruhu určuje amplitudu harmonického pohybu, frekvence kmitů je určena úhlovou rychlostí pohybu bodu. Funkce kosinus je dána časovým rozvojem průmětu pohybu do osy x, funkce sinus do osy y.

Matematická analýza jako disciplina se tímto problémem fyzikálních rozměrů logicky až tolik nezabývá. Určitě je čtenáři znám zápis ve tvaru sin(x) a rozměr veličiny x se nerozebírá. Máme-li ale na mysli analýzu dat měnících se v čase, nezbývá, než tuto formalitu alespoň zmínit. Konec konců, i s ohledem na hned následující definici kmitočtu harmonické funkce.

[2] ***amplituda*** (lat.*amplitudo*) – rozsáhlost, rozpětí, velikost, znamenitost, důstojnost

[3] ***frekvence*** (lat. *frequentia*) – hojný počet, četný dav, velká účast, zástup, hojnost, množství, četnost; ve fyzice se toto slovo začalo používat pro označení četnosti výskytu (počet výskytů určitého jevu za časovou jednotku) od 1. pol. 19. stol.

Uvedený rozbor lze matematicky formalizovat, pokud si vyjádříme hodnotu počáteční fáze součinem ωt_0. V tom případě můžeme psát

$$X(t) = A.\cos(\omega t + \omega t_0) = A.\cos[\omega(t + t_0)], \qquad (1.4)$$

kde ω zůstává úhlovým kmitočtem, tj. pro daný případ konstantním parametrem a t_0 vyjadřuje posun harmonického průběhu, tentokrát už v čase.

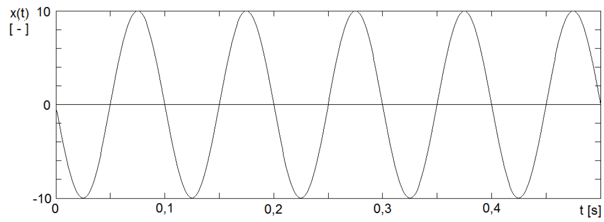
Základní perioda harmonické funkce je dána vztahem (je-li ω v radiánech)

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (1.5)$$

Se základní periodou i základním úhlovým kmitočtem souvisí ***kmitočet*** harmonické funkce f, pro který je

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (1.6)$$

a který v jednotkách SI udáváme v [Hz] s fyzikálním rozměrem $[s^{-1}]$. Na druhé straně nikomu nic nebrání používat jiné jednotky, které lépe vyjadřují časové poměry sledovaného děje.



Obr.1.3 *Příklad harmonického funkce podle vztahu (1.7)*

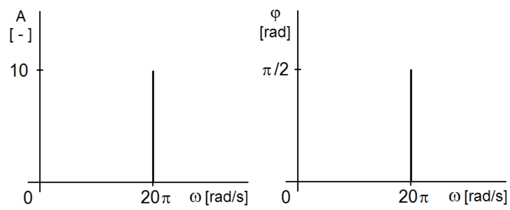
Příklad 1.2:

Určete parametry harmonické funkce definované vztahem (1.7) a jejíž průběh je zobrazený na obr.1.3

$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2). \qquad (1.7)$$

Řešení:

Amplituda je v tomto případě rovna A = 10 (je určena maximální výchylkou harmonického průběhu a jednotka, ve které její hodnotu vyjadřujeme, je dána jednotkou, ve které vyjadřujeme veličinu x(t)), úhlový kmitočet je $2.10.\pi$ $[rad.s^{-1}]$, kmitočet 10 Hz a počáteční fáze $\varphi_0 = \pi/2$ [rad].



Obr.1.4 *Grafické vyjádření závislosti (a) amplitudy a (b) počáteční fáze na úhlové frekvenci harmonické funkce podle vztahu (1.7)*

Jak plyne z definičního vztahu (1.3), průběh harmonické funkce je pro všechny hodnoty času jednoznačně určen hodnotami tří parametrů - amplitudy A, úhlového kmitočtu ω a počáteční fáze φ_0. Mohli bychom tedy její vlastnosti vyjádřit, kromě časového průběhu i graficky vzájemnou závislostí těchto parametrů, zpravidla vyjádřenou pomocí dvou závislostí – jednak závislostí amplitudy na úhlovém kmitočtu (resp. pouze kmitočtu), jednak v rovině počáteční fáze vs. úhlový kmitočet (resp. kmitočet). Uvidíme dále, že tento koncept zobrazení vlastností (harmonické) funkce v závislosti na jejím kmitočtu využijeme pro znázornění frekvenčního spektra[4] funkce (veličiny, signálu). Pro funkci definovanou vztahem (1.7) a zobrazenou na obr.1.3 je spektrum vyobrazeno na obr.1.4.

[4] ***spektrum*** (lat. *spectrum*) – obraz, objevení, zjevení (se), vzhled; poprvé použito pro výsledek optického rozkladu světla kolem r.1670.

V dalším textu budeme spektrem rozumět závislost parametrů harmonických složek podle následující definice.

Definice 1.3:

Frekvenční spektrum funkce (veličiny, signálu) je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se funkce skládá, v závislosti na frekvenci. Závislost amplitud jednotlivých harmonických složek na frekvenci nazýváme amplitudovým spektrem, závislost počátečních fází na frekvenci fázovým spektrem.

Kromě definičního vztahu harmonické funkce podle (1.3) ji lze popsat ještě i jinými způsoby.

Blízkým způsobem definičního popisu harmonické funkce je její trigonometrický tvar. Je založen na součtovém vzorci

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta \tag{1.8}$$

Podle tohoto vztahu můžeme rozepsat definiční formuli (1.3) tak, že

$$\begin{aligned} A.\cos(\omega t + \varphi_0) &= A.\cos\omega t.\cos\varphi_0 - A.\sin\omega t.\sin\varphi_0 = \\ &= A.\cos\varphi_0.\cos\omega t - A.\sin\varphi_0.\sin\omega t == C_c.\cos\omega t + C_s.\sin\omega t \end{aligned} \tag{1.9}$$

kde $C_c = A.\cos\varphi_0$ a $C_s = -A.\sin\varphi_0$. Z toho pak podělením je $\mathrm{tg}\varphi_0 = - C_s/C_c$ a tedy

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\left(-\frac{C_s}{C_c}\right) = -\mathrm{arctg}\frac{C_s}{C_c} \tag{1.10}$$

Dále po umocnění a součtu obou vztahů máme

$$C_c^2 + C_s^2 = A^2.\cos^2\varphi_0 + A^2.\sin^2\varphi_0 = A^2.(\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0) = A^2$$

a po následném odmocněnní dostáváme výraz pro amplitudu

$$A = \sqrt{C_c^2 + C_s^2}\ . \tag{1.11}$$

Způsobem, jak se dostat k dalšímu tvaru harmonické funkce je aplikace tzv. Eulerových[5] vztahů, které využívají pro vyjádření harmonického průběhu komplexního kalkulu[6] (odkaz na kapitolu Komplexní čísla):

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

a

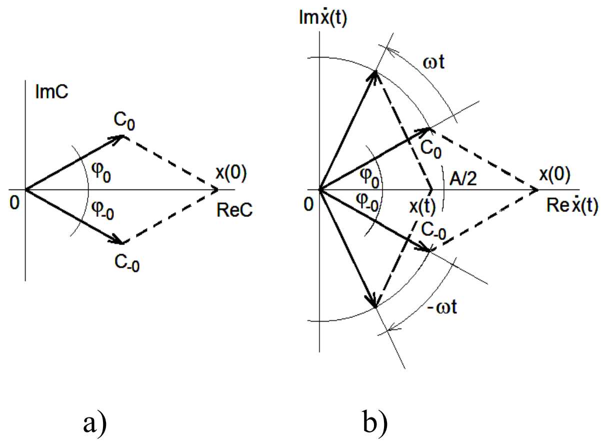
$$\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}. \tag{1.12}$$

---

[5] ***Leonhard Paul Euler*** (*1707 Basilej, Švýcarsko; +1783 Petrohrad, Rusko) švýcarský matematik a fyzik, který je považován za nejlepšího matematika 18. století a za jednoho z nejlepších matematiků vůbec. Významně přispěl k řešení otázek diferenciálního počtu, přispěl k základům teorie grafů, mechaniky, optiky, astronomie. Je po něm pojmenován asteroid, byl zobrazen na švýcarských bankovkách, 24. května je dokonce připomínán v luteránském kalendáři svatých.

[6] V matematických textech je zvykem pro vyjádření imaginární jednotky používat písmeno i. Teorie signálů a systémů, z kterých tento text vychází, je však dominantně považována za elektrotechnickou disciplínu, kde se téhož symbolu (i) používá k označení jedné ze základních elektrotechnických veličin a to okamžité hodnoty elektrického proudu. Proto se v publikacích zabývajících se problematikou zpracování signálů používá k označení komplexní jednotky symbolu j. Budeme se držet této symboliky navzdory skutečnosti, že tyto texty jsou určeny především pro čtenáře s matematickým vzděláním a doufáme, že tato maličkost jim nezpůsobí závažné trauma.

Tohoto přístupu se obvykle využívá vzhledem k snadnějším výpočtům (za některých určitých okolností) s komplexní exponenciální funkcí $e^{j\alpha}$ než s tradičními goniometrickými funkcemi sin α a cos α.



Obr.1.5 *a) Komplexní amplitudy exponenciálních složek harmonické funkce; b) časová dynamika exponenciálních složek harmonické funkce*

Vynásobíme-li první rovnici dvěma a druhou rovnici 2j, pak po sečtení výsledků dostáváme výraz

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\cdot\sin\alpha\,. \qquad (1.13)$$

Znamená to, že průběh harmonické funkce definované vztahem (1.3) lze vyjádřit též jako reálnou složku průběhu komplexní funkce $e^{j\alpha}$ a harmonická funkce jako funkce času tedy je

$$x(t) = \mathrm{Re}\{A\cdot e^{j(\omega t+\varphi_0)}\}, \qquad (1.14)$$

což odpovídá průmětu kruhového pohybu reprezentovaného pohybem vrcholu vektoru $A\cdot e^{j(\omega t+\varphi_0)}$ v komplexní rovině na reálnou osu.

Protože funkce cos je sudá, pak platí i

$$x(t) = \mathrm{Re}\{\dot{x}(t)\} = \mathrm{Re}\{A\cdot e^{j(\omega t+\varphi_0)}\} = \mathrm{Re}\{A\cdot e^{j(-\omega t-\varphi_0)}\} = \mathrm{Re}\{\dot{x}^*(t)\} \qquad (1.15)$$

kde $\dot{x}^*(t)$ je komplexně sdružená hodnota k $\dot{x}(t)$ [7]. Tímto vztahem je zaveden záporný úhlový kmitočet, který lze geometricky interpretovat (fyzikální interpretace se hledá těžko) pomocí úhlové rychlosti otáčení vektoru $A\cdot e^{j(-\omega t-\varphi_0)}$ v opačném směru (ve směru hodinových ručiček) než v případě vektoru $A\cdot e^{j(\omega t+\varphi_0)}$

Ze vztahu (1.12) pro cos(α) máme

$$x(t) = A\cdot\cos(\omega t+\varphi_0) = \frac{1}{2}\cdot(A\cdot e^{j\varphi_0}\cdot e^{j\omega t}) + \frac{1}{2}\cdot(A\cdot e^{-j\varphi_0}\cdot e^{-j\omega t}) \qquad (1.16)$$

Označíme-li

$$\dot{C}_0 = \frac{A}{2}.e^{j\varphi_0} \qquad \text{a} \qquad \dot{C}_{-0} = \frac{A}{2}.e^{-j\varphi_0} \qquad (1.17)$$

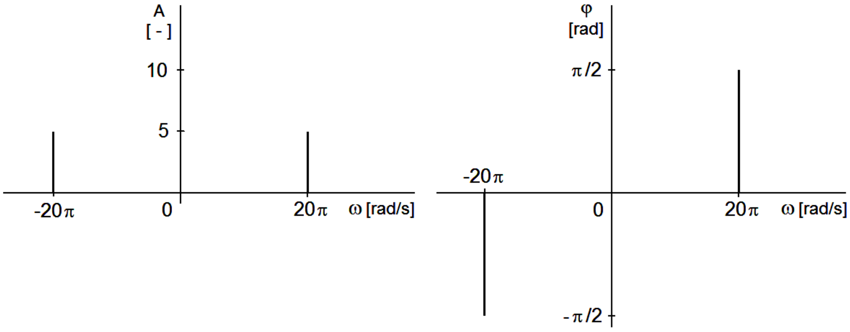
je

$$x(t) = \dot{C}_0.e^{j\omega t} + \dot{C}_{-0}.e^{j(-\omega)t}\,. \qquad (1.18)$$

To znamená, že harmonickou funkci lze vyjádřit součtem dvou komplexně sdružených výrazů, které jsou rovny okamžitým hodnotám komplexních exponenciálních funkcí vyjadřujících navzájem protiběžné otáčení vektorů $\dot{C}_0.e^{j\omega t}$ a $\dot{C}_{-0}.e^{j(-\omega)t}$ v komplexní rovině (obr.1.5). Harmonická funkce je tedy opět vyjádřena pomocí komplexních exponenciálních funkcí, tentokrát sice součtem komplexně sdružených hodnot, zato bez nutnosti mnohdy nešikovně hle-

[7] Tam, kde to bude nezbytné kvůli srozumitelnosti a odlišení od proměnných nabývajících reálných hodnot, budeme označovat komplexní proměnné tečkou nad symbolem proměnné.

dat reálnou hodnotu funkce $\dot{C}_0.e^{j\omega t}$. Je dobré si uvědomit, že moduly komplexních vektorů (resp. vektorů v komplexní rovině) $\dot{C}_0$ a $\dot{C}_{-0}$ jsou dány amplitudou harmonické funkce a jejich fáze reprezentují počáteční fázi harmonické funkce.

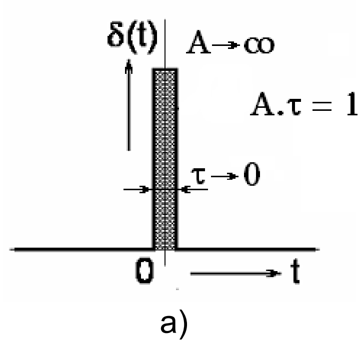


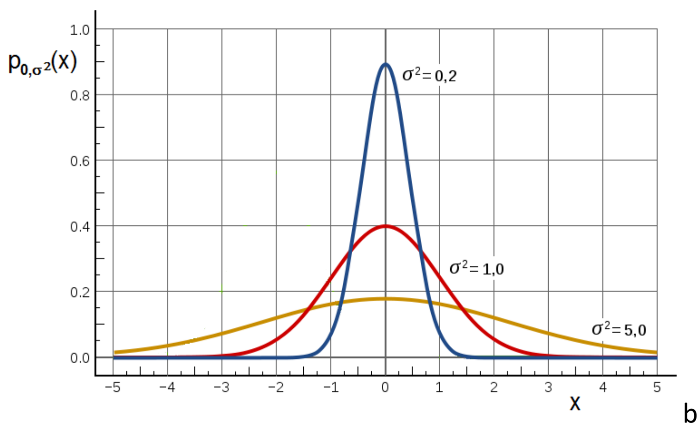
Obr.1.6 *Grafické vyjádření závislosti (a) amplitudy a (b) počáteční fáze na úhlové frekvenci harmonické funkce definované vztahem (1.7 vyjádřené podle vztahu(1.16), resp. (1.17).*

Na základě výše uvedených úvah lze frekvenční závislost amplitudy a počáteční fáze harmonické funkce podle vztahu (1.3) vyjádřit graficky nejen formou podle obr.1.4, nýbrž i tak, jak je zobrazeno na obr.1.6.

> Poznámka
> Určitě stojí za povšimnutí, že amplitudové spektrum je sudé (platí $A(\omega) = A(-\omega)$), fázové spektrum naopak liché (platí $\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$). A tak to platí obecně.
>
> Proč tomu tak je? Asi to souvisí s definicemi obou funkcí ☺. Funkce $A(\omega)$ je určena odmocninou, $\varphi(\omega)$ funkcí arctg.

1.2 Neperiodické funkce





b)

Obr.1.7 *Různá matematické vyjádření jednotkového impulzu*
a) pomocí aproximace obdélníkem;
b) pomocí Gaussovy funkce.

Funkce, které nesplňují vztah (1.1), nazýváme neperiodické. Neperiodické funkce, u kterých nastávají změny průběhu jen v relativně krátkým časovém intervalu, nazýváme jednorázové. Mezi nimi nejdůležitější pozici zaujímají dva deterministické funkční modely – jednotkový (Diracův) impulz a jednotkový skok (Heavisidova funkce).

1.2.1 Deterministické jednorázové funkce

Jednotkový (Diracův[8]) impulz, resp. Diracova delta funkce – neformálně je to taková funkce[9] $\delta(t)$, která je nulová pro všechny hodnoty reálné osy, kromě nuly, kde nabývá (nekonečné) hodnoty.

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{pro } t = 0; \\ 0 & \text{pro } t \neq 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

a současně platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \tag{1.20}$$

Zjednodušeně lze říci, že jednotkový impulz $\delta(t)$ je velice úzký (limitně s nulovou dobou trvání) a velice vysoký (limitně s nekonečnou výškou) obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky, tzn. že mohutnost, definovaná plochou, kterou jednotkový impulz ohraničil spolu s časovou osou je jednotková (obr.1.7a).

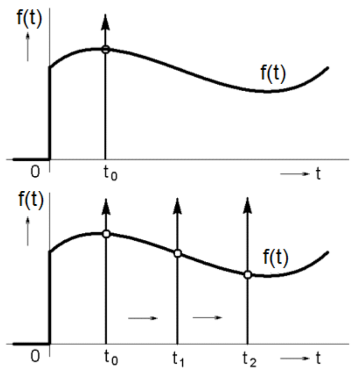
Srozumitelnou představu o vlastnostech Diracova impulzu poskytuje i limita ze vztahu pro normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou σ jdoucí k nule (viz obr.1.7b)

$$\delta(t) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-t^2/\sigma^2}. \tag{1.21}$$

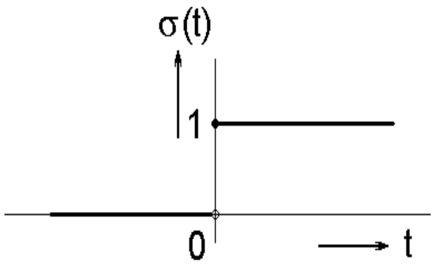
Vzhledem k požadavku formulovaném pomocí vztahu (1.20) platí i

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = 1, \tag{1.22}$$

kde argument delta funkce vyjadřuje posunutí impulzu o hodnotu t_0 v kladném směru osy t. Z tohoto vztahu pak můžeme odvodit podle následujícího postupu



Obr.1.8 *Vzorkovací vlastnost jednotkového impulzu*



Obr.1.9 *Jednotkový skok*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t - t_0)dt = f(t_0).\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = f(t_0). \tag{1.23}$$

Tento výsledek lze geometricky interpretovat tak, že plocha vymezená součinem spojité funkce f(t) a jednotkového impulzu $\delta(t - t_0)$ je rovna hodnotě funkce f(t) v tom okamžiku t_0,

---

[8] ***Paul Adrien Maurice Dirac*** (*1902, Bristol, V.Británie, +1984 Tallahassee, Florida) britský teoretický fyzik, který se zabýval kvantovou teorií, obecnou teorií relativity a kosmologií. V roce 1933 dostal spolu s Erwinem Schrödingerem Nobelovu cenu za fyziku.

[9] Z čistě matematického hlediska není Diracův impulz funkcí, protože jakákoliv reálná integrovatelná funkce, která je rovna nule v celém rozsahu argumentu, vyjma jednoho bodu, má integrál roven nule. Matematicky přesnější definice říká, že Diracův impulz není funkce, ale zobecněná funkce nebo funkcionál, zvaný distribuce.

kde se vyskytuje jednotkový impulz. Tato vlastnost se nazývá vzorkovací vlastností jednotkového impulzu (obr.1.8).

Jednotkový skok $\sigma(t)$ (Heavisidova[10] funkce) (obr.1.9) je definován vztahem např.

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases} \tag{1.24}$$

Poznámka

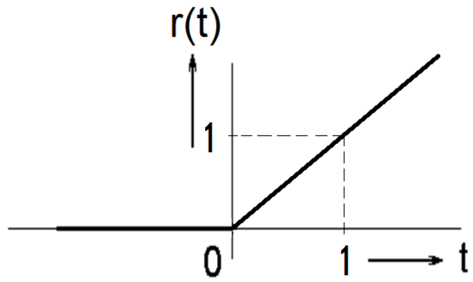
Nebývá příliš zvykem v definici použít zkratku „např.“. To se stalo, protože z různých důvodů může činit problémy nekonečná derivace (změna úrovně) v okolí bodu pro t= 0. Aby se v konkrétních situacích tento problém vyřešil, lze se setkat i s definicemi, které různě řeší otevřenost či uzavřenost intervalů, nad kterými jsou obě úrovně jednotkového skoku definovány. Tedy

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \leq 0; \\ 1, & \text{pro } t > 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

nebo třeba

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0; \\ 0{,}5 & \text{pro } t = 0; \\ 1 & \text{pro } t > 0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Navzdory skutečnosti, že obě funkce jsou v ideálním teoretickém tvaru fyzikálně nerealizovatelné (díky nekonečně rychlým změnám funkční hodnoty), mají velký význam především v experimentální analýze. Představují modely dvou základních způsobů změny experimentálních podmínek. Diracův impulz představuje model krátkodobého stimulu (světlený záblesk při evokování reakce zrakového systému, zvukový stimul (tzv. clic), vojenský povel, …), jednotkový skok reprezentuje trvalou změnu experimentálních podmínek (změna stupně zátěže při zátěžovém vyšetřování kardiorespiračního systému, zavedení nového způsobu terapie, ukončení kouření, apod).



Obr.1.10 *Funkce typu rampa*

Vzájemný vztah obou funkcí lze matematicky vyjádřit pomocí integrálního vztahu

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \sigma(t) \tag{1.27}$$

a stejně tak i naopak

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t). \tag{1.28}$$

Pro experimentální účely zajímavou základní funkci je i pro $t \geq 0$ lineárně rostoucí funkce, kterou nazýváme funkce typu rampa nebo rampová funkce (obr.1.10) a která je pomocí jednotkového skoku definována vztahem

[10] ***Oliver Heaviside*** (*1850, Londýn; +1925 Torquay, Devon, V.Británie) britský elektrotechnický inženýr, matematik a fyzik, samouk. Významný především pro zavedení komplexní a vektorové analýzy elektrických obvodů, vytvořil nové metody řešení diferenciálních rovnic.

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}\sigma(\tau)d\tau. \tag{1.29}$$

Z toho plyne, že je také

$$r(t)=\begin{cases}0, & \text{pro } t<0;\\ t, & \text{pro } t\geq 0.\end{cases} \tag{1.30}$$

Rampová funkce tvoří prostředek jak se vypořádat s nekonečně rychlým nárůstem hodnoty ideálního jednotkového skoku pro popis reálných případů, např. (obr.1.11)

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{pro } t<0;\\ t & \text{pro } t\in\langle 0,1);\\ 1 & \text{pro } t\geq 0.\end{cases} \tag{1.31}$$

Průběh rampové funkce můžeme zobecnit zavedením polynomů vyšších řádů tak, že obecně můžeme psát

$$r_n(t)=\begin{cases}0, & \text{pro } t<0;\\ t^n, & \text{pro } t\geq 0.\end{cases} \tag{1.32}$$

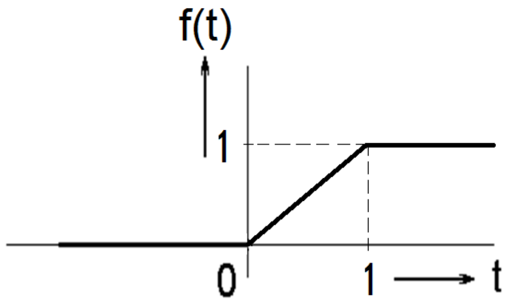
1.2.1 Náhodné funkce

Náhodné funkce jsou další důležitou formou neperiodických funkcí. Považujeme je za realizaci nějakého náhodného procesu.

Protože jsou náhodné, nemohou začínat z trvalé nulové úrovně, ani se k ní trvale vrátit. Proto nejsou na nekonečném intervalu absolutně integrovatelné, tj. neplatí, že

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt<\infty, \tag{1.33}$$

kde x(t) je náhodná funkce. Kvůli analýze takových funkcí je velice důležité si tuto skutečnost stále uvědomovat.



Obr.1.11 *Průběh funkce podle vztahu (1.31)*

V teorii signálů často označujeme náhodné funkce pojmem šum, ve statistice se spíše setkáváme s poněkud obecnějším pojmem variabilita. Díky své náhodné podstatě nemohou být přesně charakterizovány svým průběhem, nýbrž pouze parametry definující vlastnosti šumu v časové, ale např. i ve frekvenční oblasti. Nejčastěji používanou abstrakcí je tzv. bílý šum. Označení bílý vychází z ekvivalence s bílým světlem, které obsahuje rovnoměrně zastoupené složky všech vlnových délek, resp. frekvencí, tedy i barev. Proto podobně i bílý šum zahrnuje rovnoměrně zastoupené složky o všech kmitočtech.

U náhodných funkcí je z hlediska možností podrobnější analýzy důležité i rozložení jejich hodnot, právě tak jako jejich popis pomocí základních parametrů, jako jsou obecné i centrální momenty. Tato problematika je podrobně probírána v jiných předmětech, proto se na tomto místě spokojme pouze s odkazem (odkaz Biostatistika).

Při práci s náhodnými procesy a funkcemi jsou ale důležité dva pojmy, bez kterých se v tomto textu neobejdeme - stacionarita[11] a ergodicita[12].

[11] ***stacionarita*** (lat. *stationarius*, ze *statio* – stoj, postoj, místo pobytu, bydliště; původně ze slovesa *stare – stát, pevně stát, stát v řadě, stát ve zbrani) – nepohyblivý, neměnný*

Definice 1.4:

Stacionární náhodný proces je takový, jehož forma chování (jeho pravděpodobnostní struktura, daná např. rozdělením pravděpodobnosti) nezávisí na čase[13]. Jinak formulováno, stacionární náhodný proces je takový, jehož libovolné pravděpodobnostní charakteristiky nezávisejí na poloze počátku časové osy.

Z praktického hlediska často vnímáme pojem stacionarity v tzv. širším slova smyslu, kdy stačí, aby se s nezávisle proměnnou neměnily pouze statistické momenty 1. a 2. řádu, střední hodnota, rozptyl a autokorelační, resp. autokovarianční funkce.

Definice 1.5:

Ergodický náhodný proces je takový, jehož všechny realizace mají tutéž pravděpodobnostní strukturu, tytéž pravděpodobnostní charakteristiky. Pravděpodobnostní charakteristiky pak lze odhadovat z jediné, libovolné realizace náhodného procesu.

Zpravidla požadujeme (je to z hlediska analýzy pohodlnější), aby byl analyzovaný proces jak stacionární, tak i ergodický, ale obecně ergodický proces nemusí být nezbytně i stacionární a samozřejmě i naopak.

2 Základní unární[14] operace s funkcemi se spojitým časem

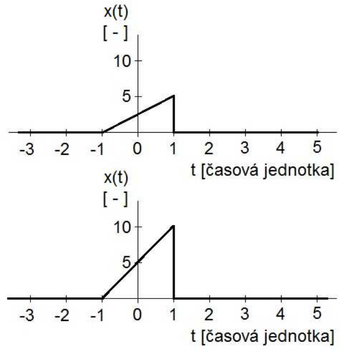
Násobení konstantou

Okamžitá hodnota funkce se zvětší (zmenší) A-krát po násobení funkce konstantou. Pro A > 1 hovoříme o zesílení, pro A < 1 o zeslabení, resp. útlumu (obr.2.1).

Změna časového měřítka

Po vynásobení hodnot nezávisle proměnné (času) konstantou k dochází k modifikaci časového měřítka – pro k > 1 hovoříme o časové kompresi, pro k < 1 o časové expanzi.

Je třeba si uvědomit, že po změně měřítka nabývá funkce v čase t týchž hodnot jako původní funkce v čase k.t, pro k > 1 tedy plyne čas rychleji, pro k<1 plyne čas pomaleji (obr.2.2).



Obr.2.1 *Násobení konstantou – A=2*

Posunutí v čase

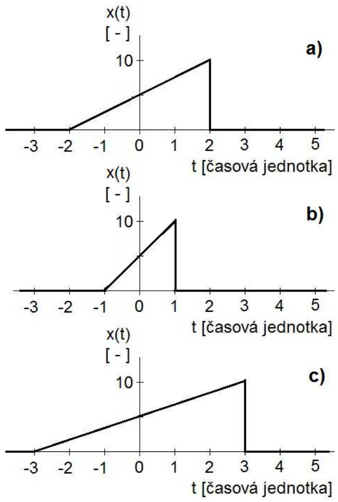
Po přičtení (odečtení) hodnoty t_0 od původního času t dochází k posunu časového průběhu funkce vlevo (vpravo) na časové ose. Jinými slovy po přičtení hodnoty t_0 dochází ke zpoždění funkce, po odečtení se funkce předchází (obr.2.3).

V čase posunutá funkce nabývá v čase $t \pm t_0$ hodnot, kterých nabývá původní funkce v čase t. Kterým směrem dochází k posunu si lze nejsnáze uvědomit pro čas $t = 0$. Aby posunutá funkce nabyla téže hodnoty jako původní v čase $t = 0$, pak musí být argument $t \pm t_0$ též roven nule. Tedy, přičítáme-li t_0, je argument nulový pro $t = -t_0$, odečítáme-li t_0, je argument nulový pro $t = t_0$.

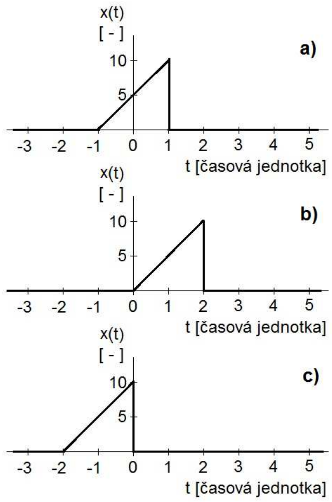
[12] ***ergodicita*** (řeč. složenina slov *έργον* práce a *όδος* cesta). Slovo bylo zavedeno Boltzmannem při řešení statistických problémů mechaniky. Používal je pro označení dynamických systémů, které zhruba řečeno měly stejné chování v čase i prostoru.

[13] Přestože stacionaritu intuitivně vnímáme jako časovou vlastnost procesu, je třeba podotknout, že stacionaritu můžeme chápat jako vlastnost vůči jakékoliv nezávisle proměnné, při zpracování obrazové 2D informace jsou to prostorové souřadnice, atd.

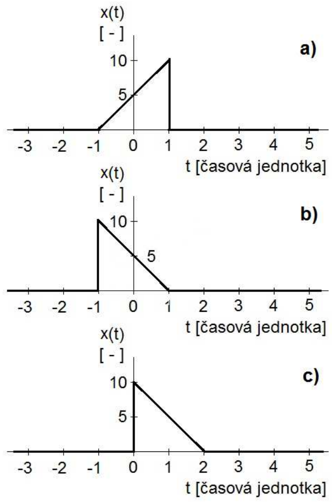
[14] ***unární operace*** je taková operace, která má jediný operand



__Obr.2.2__ Změna časového měřítka - a) originál; b) k=2; c) k=2/3



__Obr.2.3__ Posunutí v čase - a) originál x(t); b) funkce x(t-1); c) funkce x(t+1);



__Obr.2.4__ Inverze časové osy - a) originál x(t); b) funkce x(-t); c) funkce x(-t+1)

Inverze časové osy

Inverzi časové osy provedeme změnou znaménka časového argumentu. Má-li současně dojít k časovému posunu, je třeba změnit znaménko i u orientace časového posunu (obr.2.4).

Příklad 2.1:

Průběh funkce zobrazené na obr.2.4 je definován vztahy

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < -1; \\ 5t + 5 & \text{pro } t \in \langle -1, 1 \rangle; \\ 0 & \text{pro } t > 1. \end{cases}$$

To znamená. že pro vybrané hodnoty nezávisle proměnné t nabývá funkce x(t) funkčních hodnot dle následující tabulky (i tak jak to odpovídá průběhu na obr.2.4a):

t	-2	-1	0	1	2
x(t)	0	0	5	10	0

Pro vybrané hodnoty nezávisle proměnné t nabývá v čase invertovaná funkce x(-t) následujících hodnot (obr.2.4b):

t	-2	-1	0	1	2
-t	2	1	0	-1	-2
x(-t)	0	10	5	0	0

Konečně, pro argument (–t+1) a zvolené hodnoty proměnné t nabývá posunutá a v čase invertovaná funkce x(-t+1) následující funkční hodnoty (obr.2.4c):

t	-2	-1	0	1	2
-t+1	3	2	1	0	-1
x(-t+1)	0	0	10	5	0

Příklad 2.2:

Jak lze zapsat funkci definovanou vztahem (1.31) tak, aby její velikost byla A, počátek nárůstu byl v bodě t_0 a konec lineárního nárůstu v bodě t_1?

Skryté řešení:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{pro } t<t_0; \\ \dfrac{A}{t_1-t_0}t-\dfrac{A\cdot t_0}{t_1-t_0} & \text{pro } t\in\langle t_0,\, t_1); \\ A & \text{pro } t\geq t_1. \end{cases}$$