1 Výroková logika

Základní informace

V této výukové jednotce se student seznámí se základními pojmy a algoritmy ve výrokové logice.

Výstupy z výukové jednotky

Student bude umět základní logické operace s výroky, bude umět určit pravdivostní hodnotu složených výroků, seznámí se s pojmy tautologie, kontradikce, splnitelnost, systémy úplných logických spojek, disjunktní a konjunktní normální forma. Bude také umět dokázat jak přímou tak i nepřímou metodou, zda daná formule je logickým důsledkem formulí jiných.

1.1 Motivace

Výroková logika prvního řádu zkoumá výroky o nějakém předem daném univerzu (obrazu světa kolem nás). Někdy se zkoumají ještě „výroky o výrocích“, „výroky o výrocích o výrocích“, … . to však vede již na výrokové logiky vyšších řádů. Pro aplikace v informatice nejsou logiky vyšších řádů nezbytné.

Výrokovou logiku můžeme přirovnat k mluvnickému rozboru souvětí. Při rozboru souvětí se obsahem jednotlivých vět nezabýváme, zajímají nás pouze vztahy vzniklé spojováním vět do souvětí. Podobně tak nebudeme analyzovat výrok sám o sobě, ale budeme zkoumat jen vztahy jednotlivých výroků s útvarem z nich složených.

V logice jde především o to, jakým způsobem uvažujeme. Nicméně otázku, na základě čeho tak uvažujeme (resp. na základě čeho obdržíme závěry), logika neřeší. Klasická matematická logika, zvaná též formální logika, dokonce neřeší, zda předpoklady, z kterých vycházíme, jsou pravdivé, ani zda výsledek uvažování je ve shodě se skutečností, ale pouze, zda závěr vyplývá z daných předpokladů.

Za zakladatele logiky je obecně považován řecký filozof Aristoteles (384 - 322 př. n. l), který vytvořil systematicky popis některých druhů lidského uvažování, a snažil se oddělit správné úvahy od nesprávných. Je zde dále řada dalších významných osobností, které zásadně přispěli k této problematice: například W. Occam (1290 - 1349), G. W. Leibnitz (1646 - 1716), B. Bolzano (1781 - 1848), G. Boole (1815 - 1864), G. Cantor (1845 - 1912), B. Russel (1872 - 1970), K. Gödel (1906 - 1978) a další.

1.2 Úvod

Základním pojmem výrokové logiky je výrok. V takzvané dvouhodnotové logice výrokem rozumíme tvrzení (oznamovací větu), o kterém je smysluplné prohlásit, zda je pravdivé či nikoliv. Je-li tvrzení pravdivé, říkáme, že jeho pravdivostní hodnota je ***TRUE***, není-li pravdivé, že jeho pravdivostní hodnota je ***FALSE***. Často se hodnota TRUE kóduje číslem ***1***, hodnota FALSE jako ***0***.

Příklady výroků (pravdivých i nepravdivých) mohou být (známe-li okamžik, kdy jejich pravdivost posuzujeme):

1. Praha je hlavní město ČR.
2. Dnes v noci bude úplněk.
3. $4 > 3$
4. $1 + 1 = 3$

Ne každá oznamovací věta je výrokem. Například věta: „Pro proměnnou x platí, že x > 3“, není výrokem. Za výrok nelze samozřejmě považovat ani otázku. Na druhé straně tvrzení, o kterých nejsme schopni v daném čase rozhodnout, zda jsou pravdivá či nikoliv, u kterých však je principiálně možné jejich pravdivost hodnotit, například tvrzení „V posledních deseti minutách se v ČR narodilo pět dětí“, za výroky považovat budeme.

Ne každá oznamovací věta je výrokem. Například věta: „*Pro proměnnou x platí, že x > 3*“, není výrokem. Za výrok nelze samozřejmě považovat ani otázku. Na druhé straně tvrzení, o kterých nejsme schopni v daném čase rozhodnout, zda jsou pravdivá či nikoliv, u kterých však je principiálně možné jejich pravdivost hodnotit, například tvrzení „*V posledních deseti minutách se v ČR narodilo pět dětí*“, za výroky považovat budeme.

Logický úsudek pak můžeme neformálně popsat jako metodu, jak z výroků, jejichž pravdivostní hodnoty známe, vytvářet další výroky o známé pravdivostní hodnotě. Příkladem velmi jednoduchého logického úsudku může být úvaha, že pokud je výrok „*Právě teď v místě, kde se vyskytuji, neprší*“ pravdivý, je jeho opak „*Právě teď v místě, kde se vyskytuji, prší*“ nepravdivý (a naopak). Obvykle úsudek vytváříme na základě více výroků.

Například z pravdivosti výroků:

1. Franta je doma, nebo šel do restaurace.
2. Je-li Franta doma, pak nás očekává.

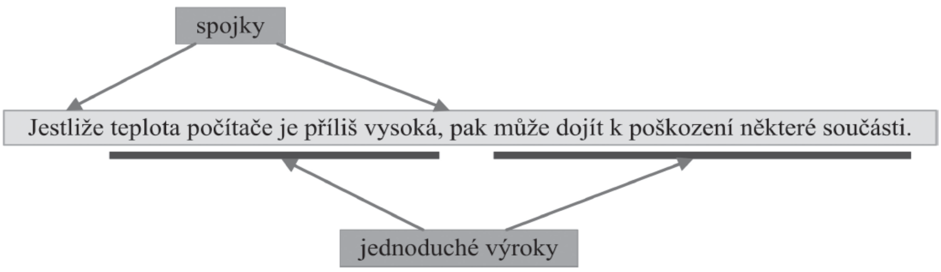
Můžeme usoudit na pravdivost výroku:

3. Jestliže nás Franta neočekává, pak odešel do restaurace.

Při tvorbě úsudků ze základních (jednoduchých) výroků vytváříme složený výrok.

1.3 Složený výrok

Běžný hovorový jazyk, jako je například český jazyk, je velice bohatý na různé slovní obraty, kterými z jednoduchých výroků vytváříme výroky složené. Hlavním úkolem výrokové logiky je analyzovat skládání jednoduchých výroků na složené výroky pomocí tak zvaných logických spojek. Příkladem může být schéma vytvoření logického výroku uvedené na následujícím obrázku.



Pro skládání výroků se nejčastěji používají následující spojky:

Negace

Negace znamená „není pravda, že …“, „neplatí …“, „ne-…“. Formálně se negace výroku *x* značí symbolem **¬*x***, někdy též *x'*, v programovacích jazycích se setkáte většinou s ***NOT x*** nebo ***!x***. Negací výroku „Tento papír je bílý“ je výrok „Tento papír není bílý“. Nejde tedy ve skutečnosti o spojku, protože se jí účastní pouze jediný výrok.

Disjunkce

znamená „… nebo …“. Ovšem nebo v tom smyslu, že se připouští i platnost obou výroků současně. Zde je třeba poznamenat, že čeština (právě tak jako angličtina) není zcela přesný jazyk v tom smyslu, že „nebo“ („or“) někdy může znamenat, že se obě možnosti nevylučují, například „*Student u zkoušky neprospěl, protože nemá dostatek nadání nebo se nepřipravil poctivě*“ ale někdy i to, že se obě možnosti vylučují – „*Student zkoušku buď složí, nebo nesloží*“. V logice je zvykem chápat nebo vždy jako nevylučující nebo. Označuje se symbolem „∨“, někdy i „+“ či slovem ***OR***. Disjunkce je pravdivá, když je alespoň jeden z výroků pravdivý. „Vylučující nebo“ je odlišnou logickou spojkou, pro kterou se užívá symbol ⊕, respektive ***XOR***. Pro „nevylučující nebo“ se užívá někdy i latinské slůvko „***vel***“. Latina byla totiž jazyk přísně dbající na přesnost a na rozdíl od většiny živých jazyků obě dvě významově odlišné spojky „*nebo*“ důsledně odlišovala. Pro „*vylučující nebo*“ užívala spojky „***aut***“.

Konjunkce

znamená „ … a … “, „ … i … “, „… a zároveň …“. Formálně se označuje symbolem „∧“, někdy i „**&**“, případě znakem násobení „**·**“ či slovem „***AND***“. Konjunkce je pravdivá právě tehdy, když jsou oba výroky pravdivé. Příkladem může být věta „Dnes bude jasno a zároveň bude vysoká teplota“.

Implikace

Implikace znamená „jestliže … , pak … “, „z … plyne … “. Formálně se označuje symbolem „⇒“, někdy i „→“, případně „⊃“. Implikace je nepravdivá jen tehdy, je-li první výrok pravdivý a druhý výrok nepravdivý. Jinak je vždy pravdivá. Z nesprávného předpokladu lze tedy v souladu s pravidly výrokové logiky vyvodit cokoliv, i zjevnou nepravdu. I takový „úsudek“ je považován za správný z hlediska formální logiky. Příkladem pravdivé implikace může být výrok „*Vylezu-li z rybníku, budu mokrý*“, ale i výrok „*Je-li 1 = 2, potom 2 < 1*“.

Ekvivalence

Ekvivalence znamená „ … tehdy a pouze tehdy, když …. “, „ … tehdy a jen tehdy, když …“, tento slovní obrat se s ohledem český jazyk nahrazuje obratem „ … právě tehdy, když … “. Formálně se označuje symbolem „⇔“, někdy i „↔“ a „≡“. Ekvivalence je pravdivá vždy, když oba výroky nabývají stejných ohodnocení, tj. oba výroky jsou pravdivé, nebo jsou oba výroky nepravdivé. Označuje nutnou a současně postačující podmínku. Ekvivalence „*Budu mokrý tehdy a pouze tehdy, když vylezu z nevypuštěného rybníku*“ nebude zřejmě správným výrokem, protože jsem se mohl vrátit z procházky v dešti.

Všechny uvedené logické spojky lze charakterizovat jednoznačně tak, že uvedeme hodnotu složeného výroku pro všechny možné kombinace pravdivostních výroků které skládáme. Níže je uvedena tato tabulka.

x	y	$\neg x$	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftarrow y$
FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	FALSE
TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE
TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE

1.4 Jazyk výrokové logiky

Abeceda jazyka výrokové logiky obsahuje:

1. symboly pro výrokové proměnné: a, b, c,…,p, q, r,… a_1, b_1, c_1, …
2. symboly pro logické konstanty:0 (FALSE), 1 (TRUE)
3. symboly pro výrokové spojky: ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔
4. pomocné symboly:(,), [,], {, }

Nechť **V** je množina elementárních výroků (výrokových proměnných). Konečnou posloupnost prvků z množiny **V**, logických spojek a závorek nazýváme ***výroková formule*** (zkráceně jen formule), jestliže vznikla podle následujících pravidel (rekurzivní definice):

1. Každá výroková proměnná (elementární výrok) a ∈ V je výroková formule.
2. Jsou-li A, B výrokové formule, pak i (¬A), (A ∧ B) , (A ∨ B) , (A ⇒ B) a (A ⇔ B) jsou také výrokové formule.
3. Nic jiného než to, co vzniklo pomocí konečně mnoha použití bodů 1 a 2, není výroková formule.

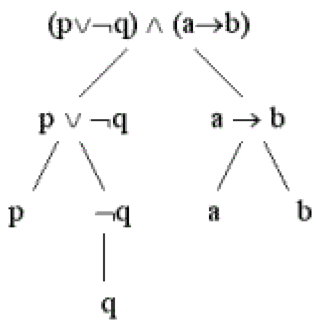
Podformule je souvislá část formule, která je sama formulí. Z pojmu podformule je patrné, že každá formule je svou podformulí. Chceme-li hovořit o podformulích, které jsou různé od původní formule, budeme používat název ***vlastní podformule***. Všechny vlastní podformule formule (a ∧ ¬b) ⇒¬ (c ∨ a) jsou tedy a, b, c, ¬b, a ∧ ¬b, c ∨ a, ¬ (c ∨ a).

Poznámka: Negace se nazývá ***unární*** spojka a ostatní se nazývají ***binární*** spojky. Výrokové proměnné značíme malými písmeny např. *a, b, c*, formule můžeme značit velkými písmeny např. A, B, C. Při zápisu negace ¬a díky silnější vazbě této negace vnější závorky neuvádíme.

Příklady:

Je řetězec (x⇒y) ⇒ ((x∧y) ∨ (y⇒¬x)) formule?

Nalezněte rozklad formule (p ∨ ¬q) ∧ (a ⇒ b) na podformule.



1.5 Pravdivostní hodnota formule

Pravdivostní ohodnocení (valuace) výrokových symbolů je zobrazení v, které ke každému výrokovému symbolu přiřazuje pravdivostní hodnotu, tj. hodnotu z množiny {1,0}, která kóduje množinu {pravda, nepravda}. Pravdivostní ohodnocení všech výrokových symbolů jazyka definuje model jazyka výrokové logiky.

Pravdivostní funkce formule výrokové logiky je funkce w, která ke každému pravdivostnímu ohodnocení výrokových symbolů přiřazuje pravdivostní hodnotu celé formule. Tato hodnota je určena takto:

1. Pravdivostní hodnota elementární formule je rovna pravdivostní hodnotě výrokového symbolu, tj. $w(p)_v = v(p)$ pro všechny výrokové proměnné p.
2. Jsou-li dány pravdivostní funkce formulí A, B, pak pravdivostní funkce formulí ¬A, A ∧ B, A ∨ B, A ⇒ B, A ⇔ B jsou dány následující tabulkou:

A	B	¬A	A ∧ B	A ∨ B	A ⊃ B	A ≡ B
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Příklad:

Napište pravdivostní tabulku formule:

$$(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((\neg x \vee y) \wedge (y \Rightarrow \neg x)).$$

x	y	$(x \Rightarrow y)$	$\Rightarrow$	$((\neg x \vee y)$	$\wedge$	$(y \Rightarrow \neg x))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0

1.6 Tautologie, kontradikce, splnitelnost

Formule se nazývá:

- ***tautologie***, jestliže je pravdivá ve všech pravdivostních ohodnoceních, např. x ∨ ¬x;
- ***kontradikce,*** jestliže je nepravdivá ve všech pravdivostních ohodnoceních, např. x ∧ ¬x;
- ***splnitelná***, jestliže existuje alespoň jedno pravdivostní ohodnocení, ve kterém je pravdivá, např. x⇒¬x (není to tautologie).

Jednou z nejjednodušších tautologií je formule $A \vee \neg A$. Naopak formule $A \wedge \neg A$ má vždy hodnotu 0, je tedy kontradikcí. Ověření obou formulí je možné provést tabulkovou metodou. Tautologie značíme symbolem "|=", takže zápis že výše uvedený výraz je tautologií bude vypadat: $\models A \vee \neg A$.

Příklad: Je výraz $[(a \rightarrow (b \vee c)] \leftrightarrow [(a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c)]$ tautologií?

Nejprve sestrojíme pravdivostní tabulku pro výraz:

			X	Y	Z	U	V	
a	b	c	$b \vee c$	$a \rightarrow b$	$a \rightarrow c$	$a \rightarrow X$	$Y \vee Z$	$U \leftrightarrow V$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Všimněme si pravdivostních hodnot, které jsou přiřazeny této formuli. Bez ohledu na dosazení pravdivostních hodnot za jednotlivé proměnné je výsledkem vždy pravdivostní hodnota 1. Formule je tedy vždy, za všech okolností pravdivá a jedná se tedy o tautologii.

1.7 Zákony pro práci s výroky

Následující seznam obsahuje některé základní tautologie výrokové logiky, které se používají při úpravách výroků.

$\models X \Leftrightarrow X$	identita, zákon totožnosti
$\models \neg(\neg X) \Leftrightarrow X$	zákon dvojí negace
$\models X \vee \neg X$	zákon vyloučení třetího
$\models (X \wedge X) \Leftrightarrow X$	zákon idempotencce
$\models (X \vee X) \Leftrightarrow X$	zákon idempotencce
$\models (X \wedge \neg X) \Leftrightarrow \text{FALSE}$	komplementárnost konjukce
$\models (X \vee \neg X) \Leftrightarrow \text{TRUE}$	komplementárnost disjunkce
$\models (X \wedge Y) \Leftrightarrow (Y \wedge X)$	komutativní zákon pro konjukci (nezáleží na pořadí)
$\models (X \vee Y) \Leftrightarrow (Y \vee X)$	komutativní zákon pro disjunkci (nezáleží na pořadí)
$\models (X \wedge Y) \wedge Z \Leftrightarrow X \wedge (Y \wedge Z)$	asociativní zákon pro konjukci (nezáleží na uzávorkování)
$\models (X \vee Y) \vee Z \Leftrightarrow X \vee (Y \vee Z)$	asociativní zákon pro disjunkci (nezáleží na uzávorkování)
$\models X \vee (Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$	distributivní zákon ("roznásobování" závorek)
$\models X \wedge (Y \vee Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$	distributivní zákon ("roznásobování" závorek)
$\models \neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee \neg Y)$	de Morganův zákon pro negaci konjunkce
$\models \neg(X \vee Y) \Leftrightarrow (\neg X \wedge \neg Y)$	de Morganův zákon pro negaci disjunkce
$\models \neg(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (X \wedge \neg Y)$	negace implikace
$\models (X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee Y)$	náhrada za implikaci

1.8 Systémy úplných logických spojek

Nyní budeme zkoumat systémy spojek, které postačují k popisu celé výrokové logiky. Ukážeme si, že každá formule výrokové logiky se dá vyjádřit formulí obsahující kromě proměnných jen spojky negace, konjunkce a disjunkce.

De Morganovy zákony (tautologie (15) a (16)) a také pravidla (23) až (26) z předcházejícího odstavce dávají návod, jak lze pomocí ekvivalentní formule nahradit určitou výrokovou spojku jinými výrokovými spojkami.

Nabízí se tedy otázka, zda existují takové podmnožiny výrokových spojek, kterými lze nahradit všechny zbývající výrokové spojky a obsáhnout tak celou výrokovou logiku. Neboli zda můžeme pro každou formuli najít formuli logicky ekvivalentní, která však obsahuje jen předem dané výrokové spojky. Ano, existují takové systémy výrokových spojek.

Množina výrokových spojek M je **funkčně úplná**, jestliže lze pomocí těchto spojek vyjádřit všechny zbývající výrokové spojky, to znamená, jestliže lze každou formuli A přepsat na formuli A´ s ní ekvivalentní, která používá pouze spojky z množiny M.

Uvedeme si několik funkčně úplných množin výrokových spojek:

1) Množina $\{\neg, \wedge, \vee\}$ je funkčně úplná.

To bude platit, podaří-li se nám pomocí spojek $\neg$, $\wedge$, $\vee$ vyjádřit zbývající výrokové spojky, což jsou $\rightarrow$ a $\leftrightarrow$. Musíme tedy ukázat, že formule obsahující spojky $\rightarrow$ a $\leftrightarrow$ lze přepsat na ekvivalentní formule, které obsahují jen spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$. To je však snadné pomocí ekvivalencí (23), (24). Připomeňme si je:

$\models (X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee Y)$ — náhrada $\rightarrow$ za $\neg$ a $\vee$

$\models (X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow [(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)]$ — náhrada $\leftrightarrow$ za dvě $\rightarrow$

Tedy podle ekvivalence (23) přepíšeme libovolnou implikaci na ekvivalentní formuli obsahující $\neg$ a $\vee$, což jsou prvky z množiny $\{\neg, \wedge, \vee\}$, jejíž funkční úplnost právě zkoumáme. Podobně pomocí ekvivalence (24) přepíšeme libovolnou ekvivalenci na konjunkci dvou implikací a obě implikace pomocí (23) opět na ekvivalentní formule obsahující jen spojky $\neg$ a $\vee$, tedy:

$$(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow [(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)] \Leftrightarrow [(\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X)]$$

Podařilo se nám ukázat, že množina $\{\neg, \wedge, \vee\}$ je skutečně funkčně úplná.

2) Množina $\{\neg, \rightarrow\}$ je funkčně úplná.

Musíme ukázat, že formule obsahující spojky $\wedge$, $\vee$ a $\leftrightarrow$ lze přepsat na ekvivalentní formule, které obsahují jen spojky $\neg$ a $\rightarrow$. To je snadné pomocí následujících ekvivalencí:

$\models (X \vee Y) \Leftrightarrow (\neg X \rightarrow Y)$ — náhrada spojek & a $\vee$

$\models (X \wedge Y) \Leftrightarrow \neg(X \rightarrow \neg Y)$ — spojkami $\neg$ a $\rightarrow$

$\models (X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow [(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)]$ — náhrada $\leftrightarrow$ za dvě $\rightarrow$

Ekvivalenci můžeme upravit také následujícím způsobem:

$$(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow [(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)] \Leftrightarrow \neg[(X \rightarrow Y) \rightarrow \neg(Y \rightarrow X)]$$

Množina $\{\neg, \rightarrow\}$ je tedy funkčně úplná.

3) Protože spojku $\wedge$ lze vyjádřit pomocí spojek $\vee$, $\neg$ a naopak spojku $\vee$ pomocí spojek $\wedge$, $\neg$ De Morganovými zákony, je funkčně úplná i množina $\{\vee,\neg\}$, resp. množina $\{\wedge,\neg\}$ (množina $\{\wedge,\vee\}$ nikoliv).

Existují ještě další úplné systémy logických spojek, ale ty pro nás nejsou tak zajímavé. Nejdůležitějším systémem pro nás bude množina $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Jak bylo slíbeno v předchozím odstavci,teď již vidíme, proč se budeme věnovat jen jedné dvojici duálních spojek a to dvojici konjunkce-disjunkce.

1.9 DNF, KNF

Tak jako se matematika snaží vyjádřit složité výrazy v nějaké přehlednější formě (například číslo 0,000 000 3 je přehlednější ve tvaru $3 \cdot 10^{-7}$), podobně i v logice se formule pro speciální účely vyjadřují v tzv. *normálních formách*. Pro tyto speciální formy formule je charakteristické, že využívají jen spojek $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Každou pravdivostní n-ární funkci f lze reprezentovat formulí výrokové logiky, která obsahuje pouze spojky negace a konjunkce, resp. disjunkce, : $A(p_1, p_2, ..., p_n)$. Učiňme dohodu, že výrazem konjunkce, resp. disjunkce, rozumíme formuli, která spojuje spojkou konjunkce, resp. disjunkce, n atomických formulí.

Literály jsou atomické formule a negace atomických formulí.

Formule A je **disjunktivní normální formou (DNF)** nad atomickými formulemi $p_1, p_2, ..., p_n$, je-li A tvaru disjunkce, jejíž každý člen je konjunkcí nějakých literálů z $p_1, p_2, ... p_n$ nebo literálem. Úplná disjunktivní normální forma formule A je její disjunktivní normální forma, v níž každý disjunkt obsahuje literály všech výrokových proměnných vyskytujících se ve formuli A.

Příkladem formule v DNF je $(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c)$

Formule A je **konjunktivní normální formou (KNF)** nad atomickými formulemi $p_1, p_2, ..., p_n$, je-li A tvaru konjunkce, jejíž každý člen je disjunkcí nějakých literálů z $p_1, p_2, ... p_n$ nebo literálem. **Úplná konjunktivní normální forma** formule A je její konjunktivní normální forma, v níž každý konjunkt obsahuje literály všech výrokových proměnných vyskytujících se ve formuli A.

Příkladem formule v CNF je $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c)$

Ke každé formuli A výrokové logiky, která není tautologií (kontradikcí), lze najít formuli B, která je ve tvaru DNF (KNF) a je ekvivalentní s A (DNF nelze zkonstruovat pro kontradikce a KNF tedy nelze zkonstruovat pro tautologie).

Příklad:

Najděte úplnou NDF formule $A = (b \vee \neg c) \rightarrow (a \wedge \neg b)$.

vyjdeme z pravdivostní tabulky této formule:

				X		Y	
a	b	c	$\neg c$	$b \vee \neg c$	$\neg b$	$a \wedge \neg b$	$X \rightarrow Y$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0

Víme, že každý řádek pravdivostní tabulky odpovídá jednomu pravdivostnímu ohodnocení proměnných a příslušné hodnotě formule pro toto ohodnocení.

Aby tato tabulka byla pravdivostní tabulkou hledané formule A´ ekvivalentní s A, musí být formule A´ pravdivá ve všech ohodnoceních, kde má formule A v daném řádku hodnotu 1 a nepravdivá ve všech ostatních ohodnoceních.

Je zřejmé, že hodnota uvedené formule A je rovna 1 v jednom z těchto případů:

1. $a = 0, b = 0, c = 1$ nebo

2. $a = 1, b = 0, c = 0$ nebo
3. $a = 1, b = 0, c = 1$

Totéž musí platit i o formuli A´. Toho dosáhneme tak, že formule A´ bude disjunkcí (má nastat alespoň jedna z možností) formulí, které přesně popisují situaci řádku tabulky, kde má formule A hodnotu 1 (což jsou případy 1. až 3., které jsme získali z 2., 5., a 6. řádku). První případ odpovídá ohodnocení, kdy proměnné a, b jsou nepravdivé a proměnná c je pravdivá - to popíšeme formulí $\neg a \wedge \neg b \wedge c$. Druhý případ odpovídá ohodnocení, kdy proměnná a je pravdivá a proměnné b, c jsou nepravdivé - tuto situaci popisuje formule $a \wedge \neg b \wedge \neg c$.

Zjistili jsme tedy, že přesně tentýž průběh hodnot jako formule $(b \vee \neg c) \to (a \wedge \neg b)$ má v závislosti na ohodnocení proměnných formule $(\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)$. Jedná se tedy o úplnou disjunktivní normální formu logicky ekvivalentní s původní formulí.

Příklad:

Najděte KNF formule $A = (\neg a \to c) \to [b \wedge (\neg c \to a)]$

Vyjdeme opět z pravdivostní tabulky této formule:

				X		Y	Z	A	¬ A
a	b	C	$\neg a$	$\neg a \to c$	$\neg c$	$\neg c \to a$	$b \wedge Y$	$X \to Z$	$\neg(X \to Z)$
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0

Podle výše uvedeného postupu je prvním krokem vytvoření negace formule A, ta je vytvořena v posledním sloupci tabulky ($\neg A$). druhým krokem je vytvoření úplné disjunktivní normální formy formule $\neg A$. Formule

$$(\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)$$

je úplnou disjunktivní normální formou negace původní formule. Další negací a s využitím De Morganova pravidla lze pak tuto formuli převést do úplné konjunktivní normální formy formule původní :

$$\neg[(\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)]$$

$$(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)$$

V tomto případě je úplná konjunktivní normální forma konjunkcí tří klauzulí. Vhodnými úpravami pomocí ekvivalencí lze tuto formuli značně zjednodušit (na úkor její úplnosti) .

$$[(a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg c)] \vee b$$

$$[(a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee (c \wedge \neg c))] \vee b$$

$$[(a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \text{false})] \vee b$$

$$[(a \vee \neg c) \wedge \neg a] \vee b$$

$$[(a \wedge \neg a) \vee (\neg c \wedge \neg a)] \vee b$$

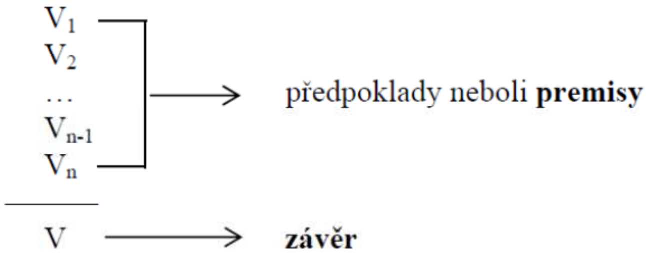
$$[\text{false} \vee (\neg c \wedge \neg a)] \vee b$$

$$(\neg c \wedge \neg a) \vee b$$

$(\neg c \vee b) \wedge (\neg a \vee b)$ - KNF původní formule

1.10 Úsudek, dedukce

Obecně můžeme úsudek charakterizovat následujícím schématem:
Na základě pravdivosti výroků (soudů, tvrzení) V_1, …, V_n soudím, že je pravdivý rovněž výrok V. Zapisujeme schematicky: V_1, …, V_n / V nebo častěji pod sebe ve tvaru:



V praxi používáme různé druhy takovýchto úsudků, ovšem ne všemi se zabývá logika. Např. se obecně nezabývá tzv. pravděpodobnostními úsudky, např.:

Slunce doposud vyšlo každý den

Slunce (pravděpodobně) vyjde i zítra

A podobně se také nezabývá úsudky které jsou tzv. generalizací:

Všechny labutě, které jsme dosud viděli jsou bílé

Všechny labutě jsou bílé

Takovéto metody odvozování závěru (případně metody zobecnění – indukce, vysvětlení – abdukce, a jiné) jsou předmětem jiných disciplín, např. Umělé inteligence, nebo také tzv. nemonotónní logiky, která se zabývá metodami nemonotónního usuzování. V těchto případech je závěr spíše jakási hypotéza, a její pravdivost není zaručena pravdivostí premis, neboť z nich logicky nevyplývá. My se zde budeme zabývat pouze tzv. ***deduktivními úsudky*** a definujeme:

Definice: Úsudek P_1, …, P_n / Z je deduktivně správný (platný), značíme P1, …, Pn |= Z , jestliže závěr Z logicky vyplývá z předpokladů P1, …, Pn, tj. za všech okolností takových, že jsou pravdivé všechny předpoklady P1, …, Pn, je (za těchto okolností) pravdivý i závěr Z.

Tedy jinými slovy: Za žádných okolností, nikdy se nemůže stát, aby byly všechny předpoklady P_1, … , P_n pravdivé a zároveň závěr Z byl nepravdivý. Závěr Z je pravdivý za všech okolností takových, za kterých jsou pravdivé všechny předpoklady. Deduktivní usuzování v praktickém životě všichni více či méně používáme, tedy usuzujeme logicky, aniž bychom si uvědomovali, že přitom používáme logiku. Tak např., jestliže víme, že všechny muchomůrky zelené jsou prudce jedovaté a zjistíme (např. za pomoci atlasu hub), že houba, kterou jsme nalezli, je muchomůrka zelená, pak jistě nebudeme tuto houbu ochutnávat a spolehneme se na logiku, neboť ta nám zaručuje, že houba, kterou jsme našli, je prudce jedovatá.

Příklady (jednoduchých, správných deduktivních úsudků).

1) Všechny kovy se teplem roztahují.
Měď je kov.

Měď se teplem roztahuje.

2) V seznamu novodobých římských císařů není žádná žena.
Marie Terezie byla žena.

Není pravda, že Marie Terezie byla římská císařovna.

3) B. Bolzano zavedl jako první pojem množiny do matematiky.
B. Bolzano se narodil v Praze.

Jako první zavedl pojem množiny do matematiky rodák z Prahy.

4) Je doma nebo odešel do kavárny.
Je-li doma, pak nás očekává.

Jestliže nás neočekává, pak odešel do kavárny.

5) Je-li tento kurs dobrý, pak je užitečný.
Buď je přednášející shovívavý, nebo je tento kurs neužitečný.
Ale přednášející není shovívavý.

Tento kurs je špatný.

6) Všechny muchomůrky zelené jsou prudce jedovaté.
Tato tužka je muchomůrka zelená.

Tato tužka je prudce jedovatá.

7) Všichni muži mají rádi fotbal a pivo.
Někteří milovníci piva nemají rádi fotbal.
Xaver má rád pouze milovníky fotbalu a piva.
____
Některé ženy nemá Xaver rád.

Správnost úsudku ověřujeme bez empirického zkoumání ”stavu světa”, tedy pouze tzv. analytickými metodami, neboť správnost úsudku je dána pouze logickou strukturou premis a závěru. Některé úsudky jsou natolik jednoduché a zřejmé, že se zdá, jako bychom žádnou logiku ani nepotřebovali. Ovšem ne vždy tomu tak je. Např. již úsudek ad 5) se nemusí jevit na první pohled zřejmý, i když je poměrně jednoduchý, ověřitelný na základě nejjednoduššího systému výrokové logiky. Rovněž jednoduchý naprosto správný úsudek ad 6) může některé čtenáře překvapit. V praxi (např. v oblasti práva, medicíny, nebo v informatice) se setkáváme s daleko složitějšími úsudky, potřebujeme řešit úlohy typu ”co vyplývá z daných předpokladů?”, apod., a pak již často nevystačíme s pouhou intuicí, potřebujeme se opřít o znalost logiky.

1.11 Logické důsledky výrokových formulí

Problém rozhodování, zdali určitá formule *A* vyplývá z množiny formulí **U**, se nazývá problém *dedukce* a je jedním ze základních problémů logiky. Ve výrokové logice hovoříme o formuli *A*, vyplývající z množiny formulí **U** jako o *(tauto)logickém důsledku* **U**. Množina formulí **U** je nazývána *speciální množinou předpokladů*, na níž je postavena (z jejích logických důsledků) určitá *teorie*.

Ohodnocení všech výrokových proměnných vyskytujících se v množině formulí U = $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ je **modelem množiny formulí** U, když má pro toto ohodnocení každá formule z U hodnotu true. Pokud má množina formulí U alespoň jeden model, pak je **splnitelná**, v opačném případě je **nesplnitelná**.

Příklad:

Najděte modely množiny formulí U = $\{p \to q;\ p \vee q,\ (p \wedge q) \vee q\}$

Použijeme tabulkovou metodu:

	p	q	$p \to q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee q$
	0	0	1	0	0	0
*	0	1	1	1	0	1
	1	0	0	1	0	0

*	1	1	1	1	1	1

Do tabulky zaneseme postupně všechny formule množiny U. Tato množina má dva modely a to na druhém a čtvrtém řádku (označeno hvězdičkami), neboť pro tato ohodnocení mají všechny tři formule z U hodnotu 1(true).

Modely množiny U tedy jsou tato ohodnocení:

1) p = 0, q= 1
2) p = 1, q= 1

Formule A je **logickým důsledkem** množiny U, platí-li pro všechny modely množiny formulí U, že formule A je v nich splněna (má hodnotu **true**). Někdy také říkáme, že formule A **logicky vyplývá** z množiny U. Fakt, že formule A je logickým důsledkem množiny U, označujeme U |= A.

Příklad: Ukažte, že formule a ∨ b je logickým důsledkem formulí ¬x ∨ b, x ∨ a.

Řešení bude provedeno **tabulkovou metodou**. Zapíšeme-li zadání příkladu symbolicky:

U = {¬x ∨ b, x ∨ a}, A = a ∨ b, máme zjistit, zda platí U |= A

	a	b	x	¬ x	¬x ∨ b	x ∨ a	a ∨ b
	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	0	0	1	0
	0	1	0	1	1	0	1
*	0	1	1	0	1	1	1
*	1	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	0	1	1
*	1	1	0	1	1	1	1
*	1	1	1	0	1	1	1

Jak je vidět z tabulky, formule a∨b je splněna (má hodnotu jedna) pro všechny modely množiny U = {x ∨ a, ¬x ∨ b} (viz řádky označené hvězdičkou), proto je jejich logickým důsledkem, neboli formule a ∨ b vyplývá z předpokladů x ∨ a, ¬x ∨ b.

Poznámka 1: Všimněme si, že formule A je splněna (má hodnotu 1) i pro některá ohodnocení, která nejsou modelem množiny U. To nevadí. Nebylo řečeno, že A je log. důsledkem množiny U tehdy, když je splnitelná právě jedině ve všech jejích modelech (což by znamenalo, že v ohodnoceních, která nejsou modely nesmí být splněna), ale, že A musí být splněna ve všech modelech množiny U (což nevylučuje možnost, že by A byla splněna i v ohodnoceních, která nejsou modely).

Poznámka 2: Logický důsledek se vždy vztahuje k nějaké množině předpokladů. Je-li A logickým důsledkem množiny U, nemusí být logickým důsledkem množiny V!!! Vše tedy závisí na tom, co říkají předpoklady, na „světě který popisujeme“.

Formule množiny předpokladů **U** nemusí být nutně logicky platné. Je-li však **U** nesplnitelná množina, pak nemá žádný model a proto jejím logickým důsledkem je libovolná formule. V tom případě lze z **U** jako důsledek získat formuli *A* i její negaci ¬*A*. Nesplnitelná množina předpokladů tedy vede ke sporným důsledkům. Z toho vyplývá, že při zjišťování, zda je formule A logickým důsledkem množiny U musíme nejdříve ověřit, zda je množina formulí U vůbec splnitelná, zda má tedy model.

Modelem prázdné množiny formulí **U** je libovolné ohodnocení výrokových proměnných. Proto logickým důsledkem prázdné množiny formulí může být pouze logicky platná formule (tautologie). Jinými slovy, je-li U prázdná množina formulí, pak |= A znamená, že A je pravdivá při libovolném ohodnocení, což odpovídá definici tautologie. Tedy symbolický zápis |= A je zkratkou pro „A je tautologie“. Totéž platí pro logický důsledek množiny **U**, kterou tvoří pouze tautologie.

Provádíme-li dedukci, pak to znamená, že zjišťujeme, zda z množiny předpokladů $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ vyplývá závěr Z. Množina předpokladů **U** = $\{ P_1, P_2, ..., P_n\}$ bývá též nazývána množinou *hypotéz* a Z je jejím logickým důsledkem. Tedy:

$$\{ P_1, P_2, ..., P_n \} \models Z.$$

Připomeňme si, že je-li **U** $\models Z$, hovoříme o platnosti formule Z ve všech modelech množiny formulí **U**.

Následující tvrzení je velmi důležité pro naše další zkoumání. Říká, že problém dedukce lze též formulovat jako logicky platnou formuli

$$\models (P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Z.$$

Nechť $P_1, P_2,..., P_n$ *jsou výrokové formule.* Z *je logickým důsledkem množiny formulí* $\{P_1, P_2, ..., P_n \}$*, právě když formule* $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Z$ *je logicky platná.*

Je velmi důležité pochopit, proč je toto tvrzení pravdivé:

Je-li Z důsledkem množiny U = $\{P_1, P_2, ..., P_n \}$ (platí-li $P_1, P_2, ..., P_n \models Z$), pak má ve všech modelech množiny U hodnotu 1. Pokud by však formule $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Z$ neměla být logicky platná, nebo-li by měla mít hodnotu 0, bylo by tehdy, když hodnota $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$ bude 1 (neboli všechny předpoklady $P_1, P_2, ..., P_n$ budou mít hodnotu 1) a hodnota Z bude 0 (neboť implikace je nepravdivá, má-li první člen hodnotu 1 a druhý 0). To však nemůže nastat, protože podle definice logického důsledku, mají-li všechny předpoklady $P_1, P_2, ..., P_n$ hodnotu 1, pak též závěr Z má hodnotu 1 (je v modelu splněn). A my víme, že Z je logickým důsledkem, nemůže tedy mít hodnotu 0. Z toho vyplývá, že implikace $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Z$ je pravdivá.

Také opačně, je-li implikace $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \} \rightarrow Z$ pravdivá a jsou-li pravdivé všechny předpoklady, musí být pravdivý i závěr Z (vyplývá to z pravdivostní tabulky implikace). To ale odpovídá definici logického důsledku Z množiny předpokladů $P_1, P_2, ..., P_n$, proto $P_1, P_2, ..., P_n \models Z$

Co z uvedeného tvrzení vyplývá? Jelikož ověření toho, zda formule Z je logickým důsledkem množiny $\{ P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \}$ je možno převést na ověření logické platnosti formule $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Z$, mnohé nejspíš napadne, že již známe prostředky, jak ověřit, že je tato formule logicky platná. Ano můžeme to udělat (kromě tabulkové metody) také tablovou metodou. Ovšem pro praktické prověřování logických důsledků těmito formálními metodami má větší význam následující tvrzení.

Nechť $P_1, P_2, ..., P_n$ *jsou výrokové formule.* Z *je logickým důsledkem množiny formulí* $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ *právě, když množina formulí* $\{ P_1, P_2, ..., P_n, \neg Z\}$ *je nesplnitelná.*

Je zřejmé, že jde-li o splnitelnost množiny formulí, jde v podstatě o současné splnění všech prvků této množiny formulí, tedy o splnění jejich konjunkce. V daném případě jde o konjunkci Tvrzení tedy jinými slovy říká, že $P_1, P_2, ..., P_n \models Z$ právě tehdy, když konjunkce $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \wedge \neg Z$není pravdivá.

Jak můžeme této věty využít? Právě jsme zjistili, že Z je logickým důsledkem množiny formulí $\{P_1, P_2, ..., P_n \}$ právě, když množina formulí $\{ P_1, P_2, ..., P_n, \neg Z\}$ (neboli konjunkce $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \wedge \neg Z$) je nesplnitelná. To tedy znamená, že k ověřování logického důsledku můžeme použít jednak tabulkovou metodu a Quinův algoritmus pro formuli $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \wedge \neg Z$ nebo tablovou metodu pro seznam formulí $P_1, P_2, ..., P_n$, $\neg$Z. Budou li výsledkem tablové metody samé nuly jako hodnoty formule nebo všechny uzly uznačené hodnotou false u Quinova stromu či jen uzavřené větve u tabla dané formule, pak formule Z je logickým důsledkem množiny formulí $\{P_1, P_2, ..., P_n \}$.

Právě popsanému typu ověřování logického důsledku se říká *nepřímý důkaz*, neboť dokazujeme logický důsledek pomocí <u>nesplnitelnost</u> formule $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \wedge \neg Z$. Nepřímý důkaz je často efektivnější a rychlejší než *přímý důkaz*. Přímý důkaz logického důsledku z množiny formulí by znamenal ukázat, že formule $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Z$ je logicky platná.

Tedy obecně přímým důkazem se snažíme dokázat logickou platnost, nepřímým nesplnitelnost.

Tablová metoda je dalším ze způsobů, jak ověřit splnitelnost (nesplnitelnost) formule. Tablo reprezentuje postupnou úpravu formule do její disjunktivní normální formy pomocí stromu. V průběhu dochází k postupnému rozkladu formule až na konjunkce jejích literálů. Budeme zde využívat reprezentaci pomocí stromu, grafické znázornění je totiž přehlednější.

Všechny uzly tabla nesou konjunkce formulí, které mají být splněny současně. Místo konjunkcí formulí budeme používat *seznamy* formulí, to znamená, že místo konjunkce „∧“ budeme používat čárku „ , “, která bude oddělovat jednotlivé formule. (V celém tablu bude hlavní spojkou konjunkce, proto když pro zjednodušení místo konjunkce budeme používat čárku, nemůžeme si splést její význam. Mějme tedy na paměti, že čárka mezi formulemi vlastně znamená konjunkci těchto formulí). Koncové konjunkce zavěšené na listech jsou buď nesplnitelnými konjunkcemi (tj. takovými, které obsahují komplementární pár literálů) nebo z nich lze stanovit modely formule.

Kořenem stromu představujícího tablo formule je formule v původním tvaru, koncové listy pak obsahují výsledky transformace do disjunktivní normální formy. Každý list představuje jeden disjunkt, který se skládá z konjunkce literálů výrokových proměnných vyskytujících se ve formuli.

Poznámka: Proč je konjunkce zavěšená na listu nesplnitelná, když obsahuje komplementární pár literálů (např ¬ p, p)? Příkladem takového seznamu literálů je např: p, q, ¬p, r, což odpovídá vícečlenné konjunkci p∧q∧¬p∧r . Víme, že vícečlenná konjunkce je pravdivá (true), jestliže jsou všechny její členy pravdivé. Naše konjunkce obsahuje členy p a ¬ p, jeden z nich je určitě nepravdivý (jsou dvě možnosti: p = false, pak ¬ p = true, nebo p = true, pak ¬ p = false, v obou případech je jeden z nich nepravdivý), proto celá konjunkce je nepravdivá neboli nesplnitelná. Vyplývá to rovněž z ekvivalence (6): p ∧ ¬ p ↔ false.

Tablová metoda umožňuje úplnou formalizaci postupu ověřování toho, zda je formule splnitelná a je proto jedním z nejperspektivnějších algoritmů pro účely automatického ověřování a odvozování.

Příklad:

Dokažte tabulkovou metodou a tablovou metodou že formule a ∨ b je logickým důsledkem formulí ¬x ∨ b, x ∨ a. Již jsme to dokázali dříve tabulkovou metodou (přímo). Zde si ji připomeneme, aby byly na jednom příkladě ukázány všechny metody, které již známe a to jak přímo, tak nepřímo.

Symbolicky: ¬x ∨ b, x ∨ a |= a ∨ b

<u>Přímý důkaz</u>: musíme dokázat, že formule ((¬x ∨ b)∧(x ∨ a))→(a ∨ b) je logicky platná

<u>Nepřímý důkaz</u>: musíme dokázat, že formule (¬x∨b) ∧ (x ∨ a) ∧ ¬(a ∨ b) je nesplnitelná

Tabulková metoda

a) přímý důkaz

				X	Y	Z	V	
a	b	x	¬x	¬x∨b	x∨a	a∨b	X∧Y	V→Z
0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1

Zjistili jsme, že formule ((¬x ∨ b) ∧ (x ∨ a))→(a ∨ b) je tautologií, což znamená, že ¬x ∨ b, x ∨ a |= a ∨ b

b) nepřímý důkaz

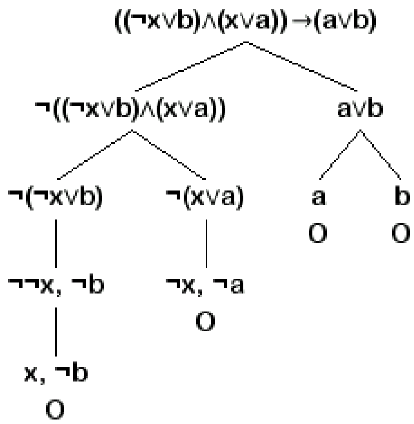
				X	Y	Z	U	
a	b	X	¬x	¬x∨b	x∨a	(a∨b)	¬Z	X∧Y∧U

0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	0	0

Zjistili jsme, že formule $(\neg x \vee b) \wedge (x \vee a) \wedge \neg(a \vee b)$ je nesplnitelná, což znamená, že $\neg x \vee b, x \vee a \models a \vee b$.

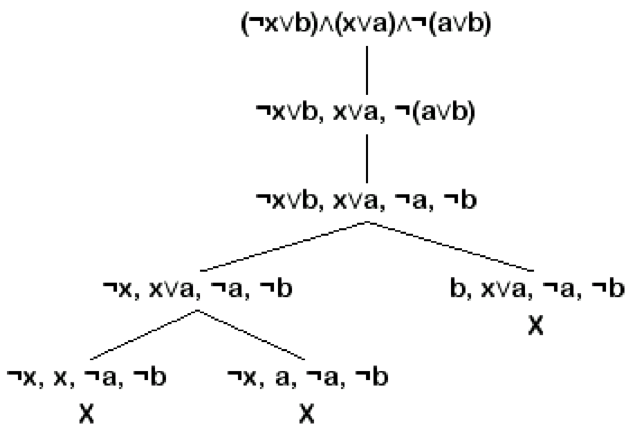
Tablová metoda

a) přímý důkaz



tablo formule $((\neg x \vee b) \wedge (x \vee a)) \rightarrow (a \vee b)$ lze samozřejmě vytvořit, ale pozor: otevřené tablo nedokazuje logickou platnost formule.

b) nepřímý důkaz



vidíme, že tablo formule $(\neg x \vee b) \wedge (x \vee a) \wedge \neg(a \vee b)$ je uzavřené, to znamená, že tato formule je nesplnitelná, to však znamená, že $\neg x \vee b, x \vee a \models a \vee b$

Poznámka: u tabulkové metody jsou dvě možnosti, jak dokázat přímou cestou logický důsledek:

1) buď ukázat logickou platnost formule $((\neg x \vee b) \wedge (x \vee a)) \rightarrow (a \vee b)$
2) nebo (jak tomu bylo dříve) ukázat, že formule $a \vee b$ je splněna ve všech modelech množiny formulí $\{\neg x \vee b, x \vee a\}$

Z úvah předcházejících odstavců je zřejmé, že za množinu předpokladů lze považovat libovolnou neprázdnou splnitelnou množinu **U** formulí výrokové logiky. Jak již bylo řečeno, kdyby totiž tato množina formulí byla nesplnitelná, neměla by model a proto by jejím logickým důsledkem byla libovolná formule (zároveň i její negace), což by vedlo ke sporné teorii. Je-li množina předpokladů prázdná, je jejím modelem libovolné ohodnocení výrokových proměnných formule. Proto logickým důsledkem prázdné množiny předpokladů může být pouze logicky platná formule neboli tautologie.

Nyní se podíváme na aplikaci ověřování důsledku na příklad z běžného života

Příklad na prověřování logických důsledků

K soudu byli předvedeni tři podezřelí z loupeže - A, B a C. Při výslechu se zjistili tyto skutečnosti:

1. Pokud je A nevinen nebo B vinen, pak C je vinen.
2. Pokud je A nevinen, pak C je nevinen.

Je A vinen?

Označíme-li výroky

„A je vinen“ …….. A

„B je vinen“ …….. B

„C je vinen“ …….. C

můžeme pak výrok „Pokud je A nevinen nebo B vinen, pak C je vinen“ vyjádřit formulí $(\neg A \vee B) \rightarrow C$ a výrok „Pokud je A nevinen, pak C je nevinen“ vyjádřit formulí $\neg A \rightarrow \neg C$.

Množinu předpokladů můžeme tedy formálně zapsat jako $\{ (\neg A \vee B) \rightarrow C, \neg A \rightarrow \neg C \}$, závěr jako A jde nám tedy o to, zjistit, zda platí $\{ (\neg A \vee B) \rightarrow C, \neg A \rightarrow \neg C \} \models A$, neboli chceme ověřit logický důsledek. Pokusíme se ověřit platnost log. důsledku všemi třemi doposud známými metodami.

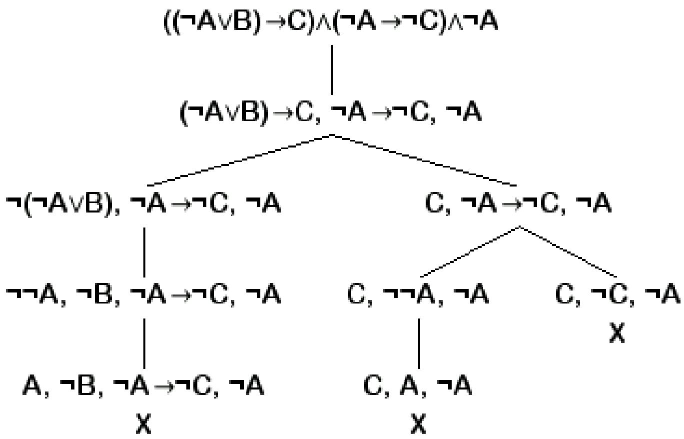
a) <u>Tabulková metoda</u>

						X			
	A	B	C	$\neg A$	$\neg C$	$\neg A \vee B$	$X \rightarrow C$	$\neg A \rightarrow \neg C$	A
	0	0	0	1	1	1	0	1	0
	0	0	1	1	0	1	1	0	0
	0	1	0	1	1	1	0	1	0
	0	1	1	1	0	1	1	0	0
*	1	0	0	0	1	0	1	1	1
*	1	0	1	0	0	0	1	1	1
	1	1	0	0	1	1	0	1	1
*	1	1	1	0	0	1	1	1	1

Z této tabulky je zřejmé, že množina předpokladů má tři modely a ve všech třech modelích je závěr splněn (má hodnotu 1). Závěr A je tedy logickým důsledkem množiny $\{ (\neg A \vee B) \rightarrow C, \neg A \rightarrow \neg C \}$. Závěr A reprezentuje výrok A je vinen. Tedy je pravda, že A je vinen.

b) <u>Tablová metoda</u>

Opět pro ověření { $(\neg A \vee B) \rightarrow C, \neg A \rightarrow \neg C$ } $\models A$ použijeme opět nepřímý důkaz, musíme ukázat, že formule $((\neg A \vee B) \rightarrow C) \wedge (\neg A \rightarrow \neg C) \wedge \neg A$ je nesplnitelná.



A skutečně, tablo formule $((\neg A \vee B) \rightarrow C) \wedge (\neg A \rightarrow \neg C) \wedge \neg A$ je uzavřené, je tedy nesplnitelná, což dokazuje, že A je log. důsledkem formulí $(\neg A \vee B) \rightarrow C, \neg A \rightarrow \neg C$, což znamená, že A je vinen.

Příklady k procvičení

TODO