Milí kolegové, Brno 20. 3. 17

omlouvám se, že až nyní jsem se dostal k opravě Vašich zápočtových prací. Jejich úrovní jsem byl opravdu otřesen – působí dojmem, že jste si z přednášky neodnesli vůbec nic, a co je ještě smutnější, patrně si to ani neuvědomujete. Vaše většinou patrně kolektivní „řešení“ obsahují (s výjimkou poslední úlohy) jen nesprávné a nezdůvodněné závěry, jejichž nesmyslnost je často patrná na první pohled. Opravdu nevím, jak může soudný člověk napsat, že kámen puštěný ze 100 metrů vysoké věže (což je zhruba výška věže Jakubského kostela), dopadne na zem přes 40 metrů od svislice, nebo že pohyb „prasátka“ vrhaného světlometem je v rozporu s teorií relativity (k čemu by pak teorie relativity byla?). Jak se může (příklad o běžcích) spokojit s povrchní nesprávnou úvahou a neprověřit si výsledek výpočtem, když zadání k tomu přímo vyzývá?

Je samozřejmě moje chyba, že jsem Vaše řešení před udělením zápočtu nezkontroloval. S tím už nemohu nic dělat, domnívám se však, že je ve vašem zájmu, abyste si alespoň s velmi elementárními úlohami dokázali poradit. Nabízím vám proto jejich nové varianty. Chcete-li se pokusit o řešení a máte zájem znát jeho zhodnocení, rád vám je pošlu. Podívejte se také na má řešení zápočtových příkladů – kdybyste s něčím nesouhlasili nebo něčemu nerozuměli, zeptejte se. (Úloha číslo 5 je poněkud odlišná, jde skutečně o článek zaslaný jisté redakci, rád bych věděl, zda jej dovedete posoudit – taková situace podle mého názoru může ve vašem životě docela dobře nastat.)

## Řešení a komentáře k zápočtovým úlohám k přednášce Teoretická fyzika I

1. Na stropě kabiny výtahu o hmotnosti $M$ v tíhovém poli Země o intenzitě $g$ je zavěšeno závaží o hmotnosti $m$. Kabina je zvedána silou $F$. Závaží je ve výšce $l$ nad podlahou kabiny. Ve chvíli, kdy rychlost kabiny je $v$, závěs přestřihneme. Za jakou dobu narazí závaží na dno kabiny?

Řešení:
Poloha závaží v závislosti na čase je dána je dána vztahem $x_z = l + vt + ½\, gt^2$, pohyb dna je dán vztahem $x_d = vt + ½\, [(F - Mg)/M]t^2$. V okamžiku nárazu závaží na dno se obě veličiny rovnají, odtud $t = \sqrt{(2Ml/F)}$.

Komentář:
Ve výsledku nevystupují veličiny $g, m, v$. Výsledek by byl stejný, i kdyby tyto veličiny byly nulové, tedy kdyby závaží „čekalo“, až k němu dorazí zrychleně se pohybující dno kabiny. Taková je situace ve vztažné soustavě, která padá spolu se závažím (závaží je v ní tedy v klidu a kabina se pohybuje vlivem síly $F$ zrychleně s nulovou počáteční rychlostí, tedy $t = \sqrt{(2a/l)}$).

Toto zjednodušení řešení umožňují tři základní principy: princip ekvivalence gravitace a zrychlení (nezávislost na $g$); princip rovnosti tíhové a setrvačné hmotnosti (nezávislost na $m$), princip relativity (nezávislost na $v$).

Příklad nemá smysl spojovat s teorií relativity (relativistické vlivy jsou naprosto zanedbatelné). Kdybychom to přece jen „z akademického zájmu“ chtěli udělat, museli bychom použít (vzhledem k tomu, že se jedná o gravitaci) obecné teorie relativity. Předložená řešení jsou nesprávná i z hlediska newtonovské mechaniky (ignorují fakt, že kabina se pod vlivem stálé tažné síly pohybuje po přestřižení závěsu s jiným zrychlením než závaží).

2. Na rovníku stojí 100 metrů vysoká věž. Z jejího vrcholu je puštěn kámen. Jak daleko od paty svislice dopadne? Jedna z mých knih nabízí toto řešení. Pracujme v inerciální soustavě, která se pohybuje společně se zemským povrchem. Díky zemské rotaci se vrchol věže v dané soustavě pohybuje, zatímco její pata je v klidu. Kámen je proto v dané soustavě vržen vodorovně na východ rychlostí, která má v dané soustavě vrchol věže. Problém je proto možno řešit jako vodorovný vrh.

Je takto získaný výsledek správný?

Řešení:

Označme výšku věže $h$, úhlovou rychlost zemské rotace $\omega$. Podle uvedeného by měl kámen dopadnout ve vzdálenosti $\omega h t$, kde $t = \sqrt{(2h/g)}$ je doba pádu.

Nesmíme však zapomenout, že v námi užité inerciální soustavě sice zůstává (v dobrém přiblížení) na místě pata věže, nikoliv však její vrchol, protože věž se otáčí kolem poledníku úhlovou rychlostí $\omega$. Během pádu se tedy v naší soustavě věž naklání, což má za následek (nakreslete si obrázek), že směr intenzity tíhového pole se stále více odchyluje od svislice. Vzniká tak (v popsané soustavě) dodatečné zrychlení $\omega g t$ ve směru k patě věže. Jeho dvojí integrací podle času určíme dodatečný posun místa dopadu během času $t$ oproti vzdálenosti dříve vypočtené. Kámen tedy dopadne ve vzdálenosti od paty věže

$x = \omega h t - \frac{1}{6} \omega g t^3 = \omega t\,(h - \frac{1}{6}\, g t^2) = \omega t\,(h - \frac{1}{3}\, h) = \frac{2}{3}\, \omega h t.$

Správný výsledek je tedy o třetinu menší než navrhovaný.

Komentář:

V řešeních je sice výsledný vzorec správně, chybí však vysvětlení, jak byl získán a proč není správně řešení navrhované v knize. Uváděný numerický výsledek (40 metrů) je nesmyslný na první pohled – asi nesprávně dosazené $T$ (doba otočení Země kolem osy v sekundách).

3. Při malých rychlostech je odpor vzduchu úměrný druhé mocnině rychlosti tělesa. Napište a vyřešte diferenciální rovnici pro volný pád. Jaké maximální rychlosti může padající těleso dosáhnout?

Řešení:

Diferenciální rovnice pohybu je (při $x$ orientovaném vzhůru) $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -g\,(1 - \alpha^2 v^2)$, kde $\alpha$ je koeficient závislý na tvaru padajícího tělesa. Při první integraci považujeme za proměnnou rychlost $v(t)$. Máme (při počáteční podmínce $v(0) = 0$) $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -\alpha^{-1}\,\mathrm{tgh}\,\alpha g t$. (Hyperbolické funkce jsou vyjádřeny pomocí funkcí exponenciálních, jak lze snadno najít v knihách či na síti.) Druhá integrace vede k výsledku $x = x_o - (1/g\alpha^2)\ln\cosh \alpha g t$. Maximální rychlosti se pohyb asymptoticky blíží pro $t \to \infty$, kdy je $|v| \to \alpha^{-1}$. Tuto rychlost lze určit i bez řešení diferenciální rovnice z nulovosti výsledné síly.

Komentář:

Smyslem úlohy bylo rozřešit v prostém případě pohybovou rovnici (po případě s využitím literatury), o což se nikdo ani nepokusil. Ani samotná rovnice nebyla jasně zdůvodněna a formulována, někde to působilo dojmem, že místo gravitační síly je v rovnici archimedovský vztlak (ten je pro malé rozdíly vzdáleností konstantní stejně jako gravitační síla a může tedy vést pouze ke změně efektivní hodnoty $g$) a síla odporu prostředí úměrná rychlosti (ta sice existuje, ale při větších rychlostech může být zanedbána oproti síle závislé na rychlosti kvadraticky, což příklad předpokládal).

4. Houpačka se skládá z nehybného hladkého poloválce poloměru $R$ a homogenní desky o délce $l$, výšce $h$ a hmotnosti $M$, která je položena kolmo na polováleс a houpá se na něm bez klouzání. Určete Lagrangeovu funkci, podmínku stability a frekvenci malých kmitů.

Řešení:

Toto je ideální úloha na Lagrangeovu funkci, krásně ukazující přednosti Lagrangeova formalismu. Momentální poloha desky je charakterizována úhlem $\phi$. Lagrangeova funkce je rozdíl kinetické a potenciální energie. V každém okamžiku se deska otáčí kolem vodorovné styčné osy. Její kinetická energie je proto $T = ½\, J\, (d\phi/dt)^2$, kde $J$ je moment setrvačnosti vzhledem k dané ose. Ten může být určen na základě Steinerovy věty (viz literatura) z momentu setrvačnosti vzhledem k rovnoběžné ose procházející hmotným středem – tento moment lze vypočítat integrací nebo najít v tabulkách. Výsledkem je

$T = ½\, [\frac{1}{12} M\, (h^2+l^2) + M\, (h^2/4 + \phi^2 R^2)]\, (d\phi/dt)^2$.

Potenciální energii určíme pomocí výšky středu hmotnosti nad vodorovnou rovinou tečnou k polováleci na základě jednoduché geometrické úvahy jako

$V = -Mg\, [R(1-\cos\phi) - \phi R \sin\phi - h/2 \cos\phi]$.

V přiblížení malých kmitů se omezíme na kvadratické výrazy a máme

$L = \frac{1}{6}\, (h^2 + l^2/4)\, M\, (d\phi/dt)^2 - ½\, Mg\, (R-h/2)\, \phi^2$.

Z Lagrangeovy rovnice plyne pro frekvenci malých kmitů

$f = 1/2\pi \sqrt{[6g(2R-h)]/[4h^2 + l^2]}$ .

Podmínka stability je totožná s podmínkou existence malých kmitů $h < 2R$.

Komentář:

Lagrangeova funkce je ve všech řešeních sestavena nesprávně (a bez jakéhokoliv vysvětlení). Někdy jsou ona sama i její členy zapsány nesmyslně se šipkou, jako by šlo o vektory, v jednom elaborátu je součet místo rozdílu energií.

5. Světlomet se otáčí jednou za sekundu. Jakou rychlostí se pohybuje světelná stopa, kterou vrhá na povrch Měsíce? Není tento výsledek v rozporu s teorií relativity?

Řešení: Předpokládejme, že paprsek dopadá na povrch Měsíce kolmo. Veďme místem dopadu kružnici se středem v umístění světlometu. Po této kružnici oběhne světelná stopa kolem dokola za sekundu, tedy rychlostí přesahující rychlost světla. (Při jiném úhlu dopadu se stopa pohybuje ještě rychleji.)

S teorií relativity to však není v rozporu, protože zdánlivě spojitý pohyb stopy je pouhá iluze. Hmota, energie ani informace se tak ve skutečnosti nepohybuje, zdrojem stopy je vždy světlomet, na stopu nelze přivěsit žádné těleso ani zprávu, kterou by stopa přenášela. Není nijak zpochybněno, že rychlost světla je nepřekročitelnou mezí šíření příčinných působení.

Komentář:

Všichni píšete, že výsledek je v rozporu s teorií relativity. Nechápu, jak něco takového můžete bez zdráhání napsat. Kdyby tomu tak bylo, byla by teorie relativity zřejmý nesmysl a nebyl by žádný důvod ji přednášet.

6. Vlak o klidové délce 100 metrů projíždí relativistickou rychlostí tunelem o téže délce. Pro stojícího pozorovatele, který se dívá kolmo na střed spojnice konců tunelu, zmizí relativistickou kontrakcí zkrácený vlak na chvíli v tunelu. Pro pozorovatele, který se pohybuje zároveň se středem vlaku rovnoběžně s kolejemi, má vlak svou klidovou délku a zkrácený je tunel. Takže pro něho vlak vždy přesahuje tunel.

Ve chvíli, kdy se dva pozorovatelé setkají, zdá se podle předchozího, že první by měl vidět přečnívat tunel, zatímco druhý by měl vidět přečnívat vlak. Jak ale mohou vidět ve stejném místě a čase každý něco jiného? Jak vysvětlit rozpor?

Řešení:

Kontrakcí délky to nevysvětlíme. Musíme vzít do úvahy konečnou rychlost světla, díky níž pozorovatel nevidí svět, jaký je v jeho relativní současnosti, ale svět, jaký byl v době, kdy k němu vyslal světlo, jež nyní pozoruje. Vidí tedy tím vzdálenější minulost, čím dál se dívá.

Uvažujme nejprve o pozorovateli, vůči němuž jede vlak a stojí tunel. V době, kdy by viděl střed vlaku, pokud by byl tunel průhledný, vidí přední část vlaku, která už kolem něho projela, zkrácenou, protože světlo z přední části vlaku k němu ještě nedorazilo. Naproti tomu zadní část vidí prodlouženou, protože k němu doráží světlo z míst, kterými vlak už projel. Tunel má pro něho normální délku. Podle jeho pozorování tedy vlak ještě nezačal vyjíždět z tunelu a také ještě do něho celý nevjel.

Nyní posuďme, co vidí pozorovatel, pro něhož stojí vlak a pohybuje se tunel. Ze stejných důvodů tento pozorovatel vidí zkrácenou část tunelu, která ho už minula, zatímco prodlouženou vidí část tunelu, která ho teprve bude míjet. Oba pozorovatelé se tedy shodují v tom, že (podle toho, jak to vidí) přední část vlaku dosud neopustila tunel, zatímco zadní část vlaku dosud v tunelu nezmizela. Žádný rozpor nevzniká.

Komentář:

Je zřejmé, že navrhované „vysvětlení“ ve skutečnosti nic nevysvětluje, jsou to pouhá slova.

7. Stejně zdatní běžci trénují tak, že vybíhají na trať s periodou $T$ = 1 minuta a pohybují se po ní rychlostí $w$ = 10 km/h. Po trati jde proti nim chodec rychlostí $v$ = 5 km/h. S jakou periodou ho běžci míjejí?

Pak je trénink obměněn tak, že běžci vybíhají s výše uvedenou periodou z plošiny vozidla, které se pohybuje po trati ve směru běhu rychlostí *v.* S jakou periodou míjejí stojícího diváka?

Je výsledek v obou případech stejný? Odpovězte nejprve bez počítání a pak se přesvědčte výpočtem o kvalitě své fyzikální intuice.

Řešení:

Zabývejme se nejprve prvním případem. Máme označenu pořadě $T$, $w$, $l = Tw$ periodu mezi průběhem běžců, jejich rychlost a vzdálenost mezi nimi, vše v soustavě spojené se zemí.

V soustavě spojené s chodcem označme analogické veličiny jako $T'$, $w'$, $l' = T'w'$. Platí $l' = l$ (vzdálenost nezávisí na vztažné soustavě), $w' = w + v$ (skládání rychlostí). Tudíž
$T' = l'/w' = l/(v + w) = T/(1 + v/w) = \frac{2}{3} T = 40$ sekund.

Pro druhý případ označme jako $T^*$, $w^*$, $l^*$ příslušné veličiny v soustavě spojené se zemí, zatímco v soustavě spojené s vozidlem je označíme jako $T''$, $w''$, $l''$. Je $w'' = w^* - v$, $l'' = T''w'' = T''(w^* - v)$. Dále je $l^* = l''$ a podle zadání $T'' = 1$ s, $w^* = 10$ km/h. Tudíž
$T^* = l^*/w^* = l''/w^* = T'' (w^* - v)/w^* = T'' (1 - v/w^*) = \frac{1}{2} T'' = 30$ sekund.

Periody tedy nejsou stejné.

Komentář:
Řešitelé slepě důvěřovali svému nesprávnému dojmu (patrně: podle principu relativity nezáleží na tom, co stojí a co se pohybuje), takže se opomněli o jeho správnosti přesvědčit. Na princip relativity se zde však odvolávat nemůžeme, protože posuzujeme-li druhou situaci v soustavě spojené s vozidlem, shoduje se s první situací posuzovanou v soustavě spojené se zemí v tom, že běžci startují z pevného místa a pozorovatel se vůči nim pohybuje, ale rychlosti běžců v soustavách nejsou stejné a nebudou tedy stejné ani periody.

8. Uspořádání objevů

Zde jen několik upřesňujících poznámek: Zemský poloměr změřil s dobrou přesností již Eratosthenes (3. století př. Kr.). Fernel užil jako první neastronomické metody. Objevem obyčejně nazýváme až experimentální potvrzení, nikoliv teoretickou předpověď. Z tohoto hlediska objev elektromagnetických vln přinesl Heinrich Hertz (1889), objev intermediálních bosonů Carlo Rubbia a Simon van der Meer (1983), objev gravitačních vln tým spojený s detektorem LIGO (2015).
Jména velkých vědců si zaslouží být nekomolena: tedy Friedrich Bessel, James Maxwell, Edwin Hubble, Richard Feynman, Russell Hulse.

## Nové příklady

1. Částice o hmotnosti *m* se pohybuje v oblasti prostoru, kde na ni působí síla úměrná rychlosti částice (tedy $F = k\,v$) a kolmá jak na tuto rychlost tak i na osu z. Na počátku má částice rychlost $v_o$ v rovině xy, Dokažte, že částice se pohybuje pokruhové dráze, a najděte její poloměr.

2. Nechť na rovníku je vypálena střela kolmo vzhůru a dosáhne výšky 100 metrů. V jakém místě dopadne zpět na zem? (Předpokládejme, že odpor vzduchu a změnu tíhového zrychlení s výškou lze zanedbat.)

3. Bazén naplněný vodou má hloubku 5 metrů, teplota vody je 20 C$^o$. Olověná koule padá od hladiny na dno. Napište a vyřešte pohybovou rovnici a určete, za jakou dobu a jakou rychlostí narazí na dno.

4. Na rovině je položen (plochou nahoru) homogenní polováleс o daných rozměrech a hustotě. Po vychýlení z rovnovážné polohy začne kmitat. Určete Lagrangeovu funkci, rovnici

pro kmitání a frekvenci malých kmitů. Námět pro další práci: Podobných úloh na kmity pravidelných těles lze vymyslet mnoho: zformulujte a vyřešte několik (tj. najděte Lagrangeovu funkci a frekvence malých kmitů. Jsou-li tělesa k dispozici, ověřte výsledek experimentálně.)

5. Posuďte následující text (viz příloha) zaslaný redakci fyzikálního časopisu, jako by Vás redakce požádala o vyjádření.

6. Představme si, že v tunelu z předchozí úlohy jsou rozestavěni pozorovatelé, jejichž úkolem je v okamžiku, kdy střed vlaku projíždí středem tunelu, polít vlak barvou. Protože vlak má stejnou klidovou délku jako tunel a je zkrácen kontrakcí délky, bude celý zabarvený. Posuďme však situaci z hlediska soustavy spojené s vlakem. V této soustavě je zkrácený tunel a vlak jej v okamžiku zabarvení přečnívá. Začátek a konec vlaku zůstanou tedy nezabarveny. Obojí však nemůže platit současně. Kde je chyba?

7. Obměňme zadání tak, že namísto běžců půjde o střely z kulometu (číselná data vhodně pozměňme). Opět vzniká otázka, zda frekvence střel z pevného místa pro pohybujícího se pozorovatele je stejná jako frekvence střel z pohybujícího se kulometu pro stojícího pozorovatele.

Námět pro další práci: Nahraďte střely fotony – částicemi pohybujícími se rychlostí světla – a kulomet zdrojem světla. Přicházejí do úvahy dvě možnosti

a) fotony jsou jako běžci – mají určitou rychlost vzhledem k „éteru" (jako běžci vzhledem k zemi)

b) fotony jsou jako střely z kulometu – mají danou rychlost vzhledem ke zdroji

Ukažte, že řídíme-li se rovnicemi teorie relativity, oba případy se neliší.

Jan Novotný

V Brně 20. března 2017