MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ
Přírodovědecká fakulta

Jiří PECL

ANALYTICKÉ VÝPOČTY TROJÚHELNÍKŮ - TŘÍBODOVÉ ÚLOHY

Rigorózní práce

Brno, 2009

Na tomto místě bych rád poděkoval doc. RNDr. Jaromíru Šimšovi, CSc. za vedení mé rigorózní práce, jeho cenné rady a podněty, které mi pomohly při zpracování tohoto tématu. Poděkování patří také mojí rodině za trpělivost a pochopení, bez nichž by tato práce vznikla jen stěží.

Prohlašuji, že rigorózní práci jsem zpracoval samostatně s použitím uvedené literatury.

V Brně 20. září 2009 Jiří Pecl

Obsah

Úvod

V diplomové práci (viz [5]) jsem se věnoval příkladům na procvičení látky analytické geometrie v rozsahu středoškolských učebnic. Tato má předchozí práce obsahuje příklady na analytické výpočty trojúhelníků seřazené do kapitol tak, aby na nich mohli studenti procvičovat konkrétní dílčí poznatky. Díky své těsné vazbě na pojmy a poznatky o trojúhelnících, jež studenti znají z hodin syntetické geometrie, mohou tyto příklady dobře vést k pochopení učiva analytické geometrie. Přesto se takové příklady v tradičních sbírkách, s výjimkou [3] či [6], vyskytují jen zřídka nebo vůbec.[1]

Předložená práce navazuje na výše zmíněnou diplomovou práci. Není však pouhou sbírkou řešených příkladů, ale systematickou prací, která ve vymezené míře úplným způsobem popisuje a řeší úlohy na výpočet souřadnic vrcholů trojúhelníku, jsou-li analyticky zadány některé jeho význačné body. Jedná se tedy o jistou analogii klasických prací, které systematicky probírají eukleidovské konstrukce trojúhelníku ze tří jeho prvků.[2] Pojem „tříbodové úlohy“ obsažený v názvu práce vysvětlíme v podkapitole 1.1.

[1] V [1], [2], [4], [7] nebo [9] se můžeme setkat s příklady na čtyřúhelníky.

[2] Viz např. knihu [8] Jaroslava Švrčka a Jiřího Vanžury, kde jsou tyto a další konstrukce popsány na str. 159–235 s úvodním přehledem všech 150 zadání.

Kapitola 1

Obecná část

1.1 Vymezení úloh

Jak již bylo zmíněno v úvodu, budeme se v této práci zabývat úlohami, v jejichž formulacích jsou vždy zadány obě souřadnice některých tří význačných bodů trojúhelníku,[1] mezi něž jsme zařadili vrcholy, středy stran, paty výšek, těžiště, ortocentrum a střed kružnice opsané. Pro přehlednost budeme v každém příkladu pracovat s trojúhelníkem s označením vrcholů ABC a dále, dle zažitých zvyklostí, budeme značit (viz obrázek na straně 10):

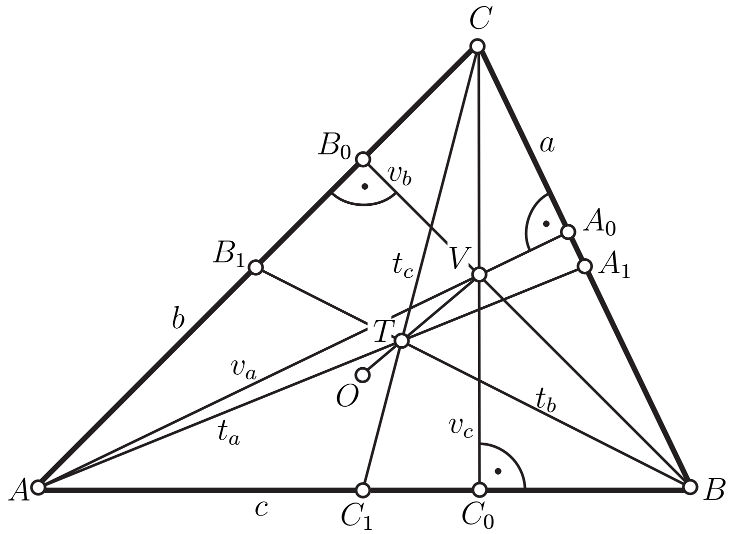
- A_1, B_1, C_1 po řadě středy stran BC, AC, resp. AB
- A_0, B_0, C_0 paty výšek spuštěných po řadě z vrcholů A, B, C
- T těžiště
- V ortocentrum
- O střed kružnice k_o trojúhelníku opsané

Dále budeme značit:

- a, b, c přímky, na nichž leží po řadě strany BC, AC, AB

[1] Takové úlohy budeme nazývat „tříbodové“.

- t_a, t_b, t_c přímky, na nichž leží po řadě těžnice AA_1, BB_1, CC_1
- v_a, v_b, v_c přímky, na nichž leží po řadě výšky AA_0, BB_0, CC_0



Ze zmíněných dvanácti význačných bodů můžeme vytvořit celkem 220 různých trojic, kterými může být trojúhelník zadán, tedy 220 možných zadání úloh, náplní každé úlohy je pak vypočítat souřadnice těch vrcholů, které v trojici zadaných bodů nejsou. Při podrobnějším zkoumání zjistíme, že na množině těchto 220 trojic je možné vytvořit rozklad na 57 tříd. Každou třídu takového rozkladu přitom tvoří ty trojice význačných bodů, které se navzájem liší pouze vhodnou permutací trojice vrcholů trojúhelníku a jejich následným přeznačením,[2] takže příslušné úlohy mají stejný postup řešení a v tomto ohledu jsou takové trojice ekvivalentní. (Ekvivalentní jsou tak např. trojice AB_1T, CA_1T, CB_1T, $\ldots$, v každé třídě je nejvýše 6 trojic). Seznam všech 220 trojic význačných bodů a jejich rozklad na třídy ekvivalentních trojic přehledně uvádíme v kapitole 4. Můžeme tedy říci, že máme 57 typově různých zadání. Z nich však předem vyloučíme ta, která jsou tvořena trojicemi bodů vázaných nějakými závislostmi a která tedy nejsou úplná.[3] Příkladem takové závislosti je kolinearita[4] bodů (např. AB_1B_0) či fakt, ža zadaná trojice bodů tvoří vrcholy pravoúhlého

[2]V rovnostranném trojúhelníku bychom tyto permutace popsali pomocí rotací a osových souměrností.

[3]Při splnění těchto závislostí má úloha nekonečně mnoho řešení, při jejich nesplnění je zadání nekorektní a úloha nemá řešení.

[4]Někdy je kolinearita tří význačných bodů navíc spojena se zachováním jistého dělícího poměru (např. VTO, ATA_1 aj.).

resp. rovnoramenného trojúhelníku (např. AB_0V, ABO aj.). Všechny nekorektní úlohy včetně závislostí v jejich zadáních přehledně uvádíme v kapitole 3. Kromě nich vynecháme také jednoprvkovou třídu tvořenou trojicí ABC. Po takovém omezení nám zůstane 38 tříd původního rozkladu, jejichž reprezentanty nyní přehledně uvedeme. Poznamenejme však ještě, že v každé trojici zadaných bodů dodržíme jisté pořadí: vrcholy mají přednost před středy stran, ty mají přednost před patami výšek, následuje těžiště, ortocentrum a nakonec střed kružnice opsané. Vše je navíc abecedně seřazeno: z každé třídy uvádíme reprezentanta, který je v dané třídě z hlediska abecedního pořadí první a i celý seznam reprezentantů je zřejmým způsobem (podle druhu zastoupených bodů a abecedně) takto uspořádán. Toto uspořádání je dodrženo i v přehledech v kapitolách 3 a 4.

1.2 Seznam všech korektních tříbodových úloh

1. A, B, A_1
2. A, B, T
3. A, B, V
4. A, A_1, B_1
5. A, B_1, C_1
6. A, A_1, B_0
7. A, B_1, T
8. A, A_1, V
9. A, B_1, V
10. A, A_1, O
11. A, A_0, B_0
12. A, B_0, C_0
13. A, B_0, T
14. A, A_0, O
15. A, B_0, O
16. A, T, V
17. A, T, O
18. A, V, O
19. A_1, B_1, C_1
20. A_1, B_1, A_0
21. A_1, B_1, C_0
22. A_1, B_1, T
23. A_1, B_1, V
24. A_1, B_1, O
25. A_1, A_0, B_0
26. A_1, B_0, T
27. A_1, B_0, V
28. A_1, B_0, O
29. A_1, T, V
30. A_1, T, O

31. A_1, V, O

32. A_0, B_0, C_0

33. A_0, B_0, T

34. A_0, B_0, V

35. A_0, B_0, O

36. A_0, T, V

37. A_0, T, O

38. A_0, V, O

Pořadí a téma každé řešené úlohy v následující kapitole přesně odpovídá předchozímu seznamu.

1.3 Metody řešení

Předtím než přistoupíme v kapitole 2 k podrobnému řešení každé výše uvedené úlohy, řekneme něco obecného o metodách jejich řešení.

Každou úlohu, kterou bychom v planimetrii řešili eukleidovskými konstrukcemi (tzn. pomocí pravítka a kružítka), můžeme prostředky analytické geometrie řešit „stejně“. Kopírování eukleidovské konstrukce je dokonce mnohdy tím nejvýhodnějším postupem, ať už je nám měřítkem časová náročnost nebo složitost výpočtů. V mnoha případech je však výhodnější buď takovou konstrukci upravit, nebo úlohu řešit algebraicky, postupem, který nemá konstrukční analogii či předlohu. Postupujeme přitom tak, že souřadnice některých hledaných bodů nebo jim odpovídající hodnoty v parametrických či obecných rovnicích význačných přímek zvolíme za neznámé a sestavujeme pro ně rovnice, které pak algebraickými prostředky řešíme.

I když je teoreticky možné každou úlohu zapsat soustavou algebraických rovnic pro šest souřadnic x_A, y_A, x_B, y_B, x_C a y_C vrcholů hledaného trojúhelníku ABC, řešit takové soustavy je často krajně obtížné, či prakticky nemožné. Proto se vyplatí hledat u každé jednotlivé úlohy jednoduchou volbu co nejmenšího počtu neznámých, při které lze danou situaci vystihnout dobře řešitelnými rovnicemi. V nalezení těchto specifických postupů a jejich systematickém výkladu spočívá smysl a přínos této práce.

1.4 Předpokládané znalosti

K úspěšnému řešení většiny tříbodových úloh se předpokládají vědomosti a poznatky, které lze získat v kurzech planimetrie a analytické geometrie na gymnáziu. Opakování těchto poznatků z učebnic [3] a [7] ani jejich stručný přehled není náplní této práce.

Při řešení některých úloh se jako nejschůdnější jeví využít poznatky, jež nejsou standardní náplní středoškolských kurzů matematiky. Do této kategorie lze jistě zařadit poznatky o Feurbachově kružnici (též kružnice devíti bodů) a poznatky o Eulerově přímce, o nichž lze najít mnoho informací např. v [8] na str. 46–48.

V práci se tedy můžeme setkat jak s příklady nižší náročnosti, tak i s příklady, které jsou náročnější, vyžadující netriviální úvahy. Takové jsou v textu označeny symbolem *. Nejnáročnější příklady[5] jsou označeny symbolem **. Na tyto příklady je čtenář upozorněn již v obsahu.

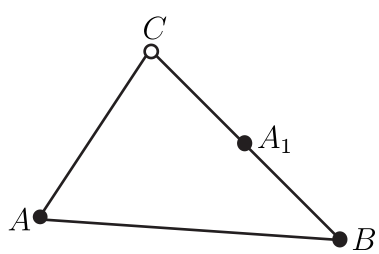
[5] Měřítkem nám může být jak složitost výpočtů, tak i náročnost úvah, vhodná volba neznámých apod.

Kapitola 2

Řešené úlohy

V této kapitole postupně řešíme jednotlivé tříbodové úlohy v pořadí podle seznamu na str. 11–12. Každá úloha obsahuje úplné slovní zadání s konkrétními numerickými údaji, obecný (na údajích nezávislý) rozbor s názorným obrázkem, numerický výpočet a výsledek. Bez újmy na obecnosti jsou nakreslené trojúhelníky v rozborech ostroúhlé. Pro lepší názornost jsou zadané body v obrázcích zvýrazněny.

■ **Příklad 1:** Vypočítejte souřadnice zbylého vrcholu C trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrcholy $A[-2,-3]$, $B[5,-2]$ a střed $A_1[3,0]$ strany BC.

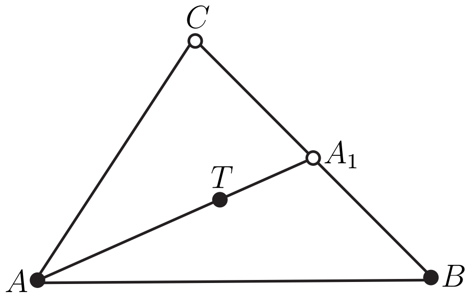


Rozbor: Bod A_1 je střed úsečky BC, proto je $C = A_1 + \overrightarrow{BA_1}$.

Výpočet: $C = A_1 + \overrightarrow{BA_1} = 2A_1 - B = 2 \cdot [3,0] - [5,-2] = [1,2]$

♠ **Výsledek:** $C[1,2]$

■ **Příklad 2:** Vypočítejte souřadnice zbylého vrcholu C trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrcholy $A[-9,1]$, $B[6,-2]$ a těžiště $T[0,1]$.

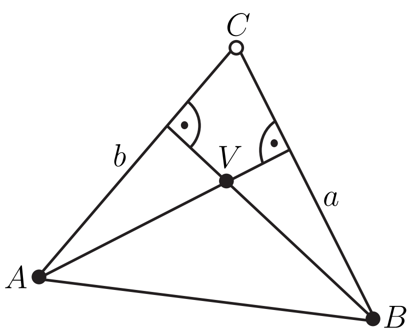


Rozbor: Víme, že pro souřadnice těžiště T platí $T = \frac{1}{3}(A+B+C)$. Úpravou tohoto vztahu dostáváme rovnost $C = 3T - A - B$.

Výpočet: $C = 3T - A - B = 3 \cdot [0,1] - [-9,1] - [6,-2] = [3,4]$

♠ **Výsledek:** $C[3,4]$

■ **Příklad 3:** Vypočítejte souřadnice zbylého vrcholu C trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrcholy $A[-3,0]$, $B[7,-5]$ a ortocentrum $V[0,2]$.



Rozbor: Vrchol C určíme jako průsečík přímek a, b. Přímka a prochází vrcholem B kolmo k $\overrightarrow{AV}$, přímka b prochází vrcholem A kolmo k $\overrightarrow{BV}$. Protože známe normálové vektory přímek a, b, zapíšeme jejich obecné rovnice.

Výpočet: $\overrightarrow{AV} = (3,2) \overset{B\in a}{\Rightarrow} a: 3x + 2y - 11 = 0\,; \quad \overrightarrow{BV} = (-7,7) \overset{A\in b}{\Rightarrow} b: x - y + 3 = 0$

$$C = a \cap b: \quad 3x_C + 2y_C - 11 = 0$$

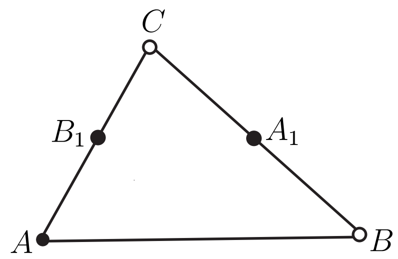
$$\underline{x_C - y_C + 3 = 0}$$

$$5x_C - 5 = 0$$

$$x_C = 1 \quad \Rightarrow \quad y_C = 4$$

♠ **Výsledek:** $C[1,4]$

■ **Příklad 4:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[-2, 0]$, střed $A_1[8, 6]$ strany BC a střed $B_1[5, 0]$ strany AC.

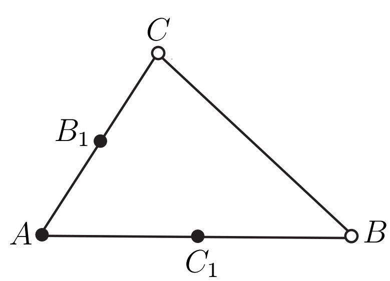


Rozbor: Bod B_1 je střed úsečky AC, proto platí $B_1 = \frac{1}{2}(A+C)$. Úpravou tohoto vztahu dostáváme rovnost $C = 2B_1 - A$. Podobně je bod A_1 střed úsečky BC, proto platí vztah $A_1 = \frac{1}{2}(B + C)$, jehož úpravou dostáváme $B = 2A_1 - C$.[1]

Výpočet: $C = B_1 + \overrightarrow{AB_1} = 2B_1 - A = 2[5, 0] - [-2, 0] = [12, 0]$
$B = A_1 + \overrightarrow{CA_1} = 2A_1 - C = 2[8, 6] - [12, 0] = [4, 12]$

♠ **Výsledek:** $B[4, 12]$, $C[12, 0]$.

■ **Příklad 5:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[-5, -4]$, střed $B_1[-2, -2]$ strany AC a střed $C_1[3, -3]$ strany AB.



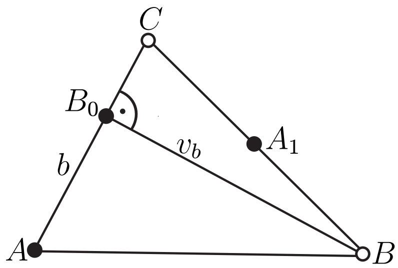
Rozbor: Bod C_1 je střed úsečky AB, proto platí vztah $B = 2C_1 - A$. Podobně je bod B_1 střed úsečky AC, platí tedy $C = 2A_1 - B$.

Výpočet: $B = C_1 + \overrightarrow{AC_1} = 2C_1 - A = 2[3, -3] - [-5, -4] = [11, -2]$
$C = B_1 + \overrightarrow{AB_1} = 2B_1 - A = 2[-2, -2] - [-5, -4] = [1, 0]$

♠ **Výsledek:** $B[11, -2]$, $C[1, 0]$.

[1] Střed A_1 úsečky BC je dán vztahem $A_1 = \frac{1}{2}(B + C)$, jednoduchou úpravou dostáváme $B = 2A_1 - C$, resp. $C = 2A_1 - B$. Podobně můžeme odvodit $A = 2B_1 - C$, $A = 2C_1 - B$, $B = 2C_1 - A$ a $C = 2B_1 - A$. Tyto vztahy již dále v textu nebudeme objasňovat.

■ **Příklad 6:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[-5,2]$, střed $A_1[3,6]$ strany BC a patu $B_0[0,7]$ výšky BB_0.



Rozbor: Vrchol B leží na přímce v_b procházející bodem B_0 kolmo k $\overrightarrow{AB_0}$. Vrchol C leží na přímce b procházející body A, B_0. Souřadnice vrcholů B, C dopočítáme ze vztahu $B = 2A_1 - C$, neboť A_1 je střed úsečky BC.

Výpočet: $\overrightarrow{AB_0} = (5,5)$

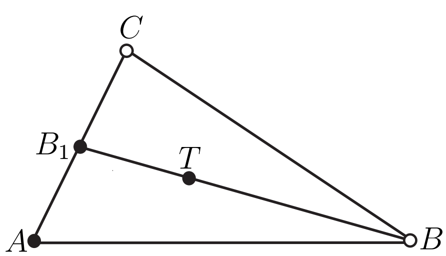
$v_b : x + y - 7 = 0;\ B \in v_b \ \Rightarrow B[x_B, 7 - x_B]$

$b : X = [-5,2] + t \cdot (1,1),\ t \in \mathbb{R};\ C \in b \ \Rightarrow C[-5+t, 2+t]$

$$B = 2A_1 - C \ \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_B &= 6 + 5 - t \\ \underline{7 - x_B} &\underline{= 12 - 2 - t} \\ 7 &= 21 - 2t \\ t &= 7 \qquad \Rightarrow \ x_B = 4,\ y_B = 3,\ x_C = 2,\ y_C = 9 \end{aligned}$$

♠ **Výsledek:** $B[4,3],\ C[2,9]$.

■ **Příklad 7:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[-2,-3]$, střed $B_1[0,1]$ strany AC a těžiště $T[2,0]$.



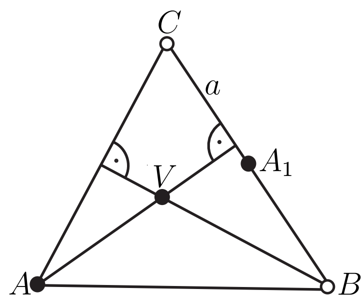
Rozbor: Z vlastnosti $\overrightarrow{BT} = 2\overrightarrow{TB_1}$ pro těžiště, vrchol a střed protější strany trojúhelníku plyne $B = 3T - 2B_1$. Bod B_1 je střed úsečky AC, proto platí $C = 2B_1 - A$.

Výpočet: $B = 3T - 2B_1 = 3[2,0] - 2[0,1] = [6,-2]$

$C = 2B_1 - A = 2[0,1] - [-2,-3] = [2,5]$

♠ **Výsledek:** $B[6,-2],\ C[2,5]$.

■ **Příklad 8:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[-22,-17]$, střed $A_1[17,16]$ strany BC, a ortocentrum $V[8,13]$.



Rozbor: Vrcholy B, C leží na přímce a procházející bodem A_1 kolmo k $\overrightarrow{AV}$. Bod A_1 je střed úsečky BC, proto platí vztahy $B = A_1 + t \cdot \vec{u}$, $C = A_1 - t \cdot \vec{u}$, kde $\vec{u}$ je nenulový vektor kolmý k $\overrightarrow{AV}$. Parametr t vypočítáme ze vztahu $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BV} = 0$.

Výpočet: $\overrightarrow{AV} = (30,30)$, $\vec{u} \perp \overrightarrow{AV} \Rightarrow \vec{u} = (1,-1)$

$B = A_1 + t \cdot \vec{u} = [17+t, 16-t]$

$C = A_1 - t \cdot \vec{u} = [17-t, 16+t]$

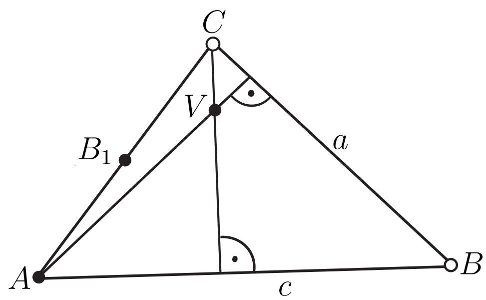
$\overrightarrow{AC} = (39-t, 33+t)$, $\overrightarrow{BV} = (-9-t, -3+t)$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BV} &= 0 \\
(39-t, 33+t) \cdot (-9-t, -3+t) &= 0 \\
t^2 - 30t - 351 + t^2 + 30t - 99 &= 0 \\
2t^2 - 450 &= 0 \\
t^2 &= 225 \\
t &= \pm\, 15
\end{aligned}$$

Pro $t = 15$ je $B[32,1]$, $C[2,31]$, pro $t = -15$ je $B[2,31]$, $C[32,1]$.

♠ **Výsledek:** $B[32,1]$ a $C[2,31]$, nebo $B[2,31]$ a $C[32,1]$.

■ **Příklad 9:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[-3,0]$ střed $B_1[-1,2]$ strany AC a ortocentrum $V[0,2]$.



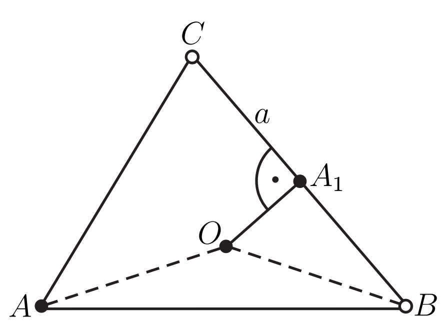
Rozbor: Bod B_1 je střed úsečky AC, proto platí $C = 2B_1 - A$. Vrchol B určíme jako průsečík přímek a, c. Přímka a prochází vrcholem C kolmo k $\overrightarrow{AV}$, přímka c prochází vrcholem A kolmo k $\overrightarrow{CV}$.

Výpočet: $C = 2B_1 - A = 2[-1,2] - [-3,0] = [1,4]$
$\overrightarrow{AV} = (3,2) \overset{C\in a}{\Rightarrow} a : 3x + 2y - 11 = 0\,; \quad \overrightarrow{CV} = (-1,-2) \overset{A\in c}{\Rightarrow} c : x + 2y + 3 = 0$

$$\begin{aligned} B \in a \cap c \ \Rightarrow\ 3x_B + 2y_B - 11 &= 0 \\ \underline{x_B + 2y_B + \ \ 3} &\underline{= 0} \\ 2x_B - 14 &= 0 \\ x_B &= 7 \quad \Rightarrow y_B = -5 \end{aligned}$$

♠ **Výsledek:** $B[7,-5]$, $C[1,4]$.

■ **Příklad 10:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[-2,-1]$, střed $A_1[5,2]$ strany BC a střed $O[2,2]$ kružnice opsané.



Rozbor: Vrcholy B, C leží na přímce a procházející bodem A_1 kolmo k $\overrightarrow{OA_1}$. Známe tedy i některý směrový vektor $\vec{u}$ přímky a. Bod A_1 je střed úsečky BC, platí tedy vztahy $B = A_1 + t\cdot\vec{u}$, $C = A_1 - t\cdot\vec{u}$. Parametr t dopočítáme ze vztahu $|AO| = |BO|$.

Výpočet: $\overrightarrow{OA_1} = (3,0) \Rightarrow \vec{u} = (0,1)$
$B = A_1 + t\cdot\vec{u} = [5, 2+t]$

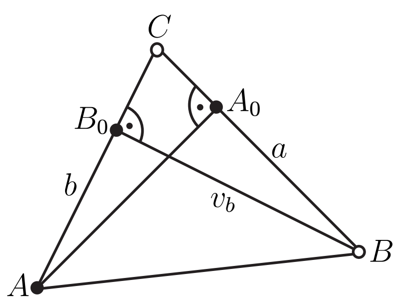
$C = A_1 - t \cdot \vec{u} = [5, 2 - t]$
$|AO| = \sqrt{(2+2)^2 + (2+1)^2} = 5$
$|BO| = \sqrt{(2-5)^2 + (2-2-t)^2} = \sqrt{9+t^2}$

$$\begin{aligned} |AO| &= |BO| \\ 5 &= \sqrt{9+t^2} \\ 25 &= 9 + t^2 \\ t^2 &= 16 \\ t &= \pm 4 \end{aligned}$$

Pro $t = 4$ je $B[5,6]$, $C[5,-2]$, pro $t = -4$ je $B[5,-2]$, $C[5,6]$.

♠ **Výsledek:** $B[5,6]$ a $C[5,-2]$, nebo $B[5,-2]$ a $C[5,6]$.

■ **Příklad 11:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[-7,-5]$, patu $A_0\left[\frac{7}{5}, \frac{11}{5}\right]$ výšky AA_0 a patu $B_0\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ výšky BB_0.



Rozbor: Vrchol B určíme jako průsečík přímek a, v_b, vrchol C určíme jako průsečík přímek a, b. Přímka a prochází bodem A_0 kolmo k $\overrightarrow{AA_0}$, přímka v_b prochází bodem B_0 kolmo k $\overrightarrow{AB_0}$ a přímka b prochází body A, B_0.

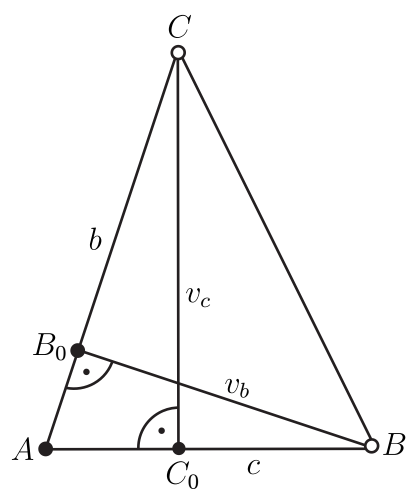
Výpočet: $\overrightarrow{AA_0} = \left(\frac{42}{5}, \frac{36}{5}\right) \parallel (7,6) \overset{A_0 \in a}{\Rightarrow} a : 7x + 6y - 23 = 0$
$\overrightarrow{AB_0} = \left(\frac{9}{2}, \frac{15}{2}\right) \parallel (3,5) \overset{B_0 \in v_b}{\Rightarrow} v_b : 3x + 5y - 5 = 0$
$b : X = [-7,-5] + t \cdot (3,5), t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B = a \cap v_b : \quad 7x_B + 6y_B - 23 &= 0 \\ \underline{3x_B + 5y_B \;\; - 5} &\underline{= 0} \\ -17x_B - 14 &= 0 \\ x_B &= 5 \quad \Rightarrow y_B = -2 \end{aligned}$$

$$C = a \cap b: \quad 7(-7+3t) + 6 - 5 + 5t - 23 = 0$$
$$51t - 102 = 0$$
$$t = 2 \quad \Rightarrow C[-1, 5]$$

♠ **Výsledek:** $B[5, -2]$, $C[-1, 5]$.

■ **Příklad 12:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[2, 1]$, patu $B_0[-1, -5]$ výšky BB_0 a patu $C_0[-4, -5]$ výšky CC_0.



Rozbor: Vrchol B určíme jako průsečík přímek c, v_b, vrchol C určíme jako průsečík přímek b, v_c. Přímka b prochází body A, B_0, přímka c prochází body A, C_0, zapíšeme proto jejich parametrické rovnice. Přímka v_b prochází bodem B_0 kolmo k $\overrightarrow{AB_0}$, přímka v_c prochází bodem C_0 kolmo k $\overrightarrow{AC_0}$.

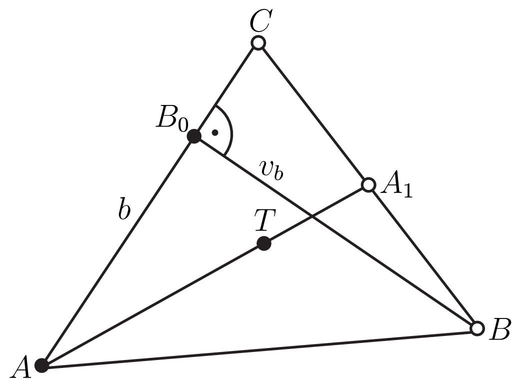
Výpočet: $\overrightarrow{AB_0} = (-3, -6) \parallel (1, 2)$, $\overrightarrow{AC_0} = (-6, -6) \parallel (1, 1)$
$b : X = [2, 1] + t(1, 2),\ t \in \mathbb{R}; \quad c : X = [2, 1] + s(1, 1),\ s \in \mathbb{R}$
$v_b : x + 2y + 11 = 0; \quad v_c : x + y + 9 = 0$

$$B = c \cap v_b: \qquad 2 + t + 2(1+t) + 11 = 0$$
$$3t + 15 = 0$$
$$t = -5 \quad \Rightarrow B[-3, -4]$$

$$C = b \cap v_c: \qquad 2 + t + 1 + 2t + 9 = 0$$
$$3t + 12 = 0$$
$$t = -4 \quad \Rightarrow C[-32, -7]$$

♠ **Výsledek:** $B[-3, -4]$, $C[-32, -7]$.

■ **Příklad 13:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[0,-3]$, patu $B_0[4,1]$ výšky BB_0 a těžiště $T[4,-1]$.



Rozbor: Úpravou vztahu $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TA_1}$ pro těžiště, vrchol a střed protější strany v trojúhelníku dostáváme $A_1 = \frac{3}{2}T - \frac{1}{2}A$. Vrchol B leží na přímce v_b proh※ázející bodem B_0 kolmo k $\overrightarrow{AB_0}$. Vrchol C leží na přímce b procházející body A, B_0. Souřadnice vrcholů B, C dopočítáme ze vztahu $B = 2A_1 - C$, neboť A_1 je střed úsečky BC.

Výpočet: $A_1 = \frac{3}{2}T - \frac{1}{2}A = \frac{3}{2}[4,-1] - \frac{1}{2}A[0,-3] = [6,0]$

$\overrightarrow{AB_0} = (4,4) \parallel (1,1)$

$b : X = [0,-3] + t(1,1),\ t \in \mathbb{R}$

$v_b : x + y - 5 = 0$

$C \in b \Rightarrow C[t, -3+t]$

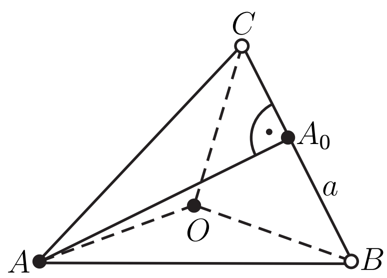
$B \in v_b \Rightarrow B[x_B, 5 - x_B]$

$$\begin{aligned} B &= 2A_1 - C \\ [x_B, 5 - x_B] &= 2[6,0] - [t, -3+t] \\ [x_B, 5 - x_B] &= [12 - t, 3 - t] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_B + t &= 12 \\ \underline{-x_B + t} &\underline{= -2} \\ 2t &= 10 \\ t &= \ 5 \ \Rightarrow x_B = 7,\ y_B = -2,\ x_C = 5,\ y_C = 2 \end{aligned}$$

♠ **Výsledek:** $B[7,-2]$, $C[5,2]$.

■ **Příklad 14:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[-2,-2]$, patu $A_0[4,4]$ výšky AA_0 a střed $O[1,2]$ kružnice opsané.



Rozbor: Oba vrcholy B i C leží na přímce a procházející bodem A_0 kolmo k $\overrightarrow{AA_0}$. Navíc mají vzdálenosti $|BO|$ a $|CO|$ danou velikost $|AO|$.

Výpočet: $\overrightarrow{AA_0} = (6,6) \parallel (1,1)$

$a: x + y - 8 = 0$

$B, C \in a \Rightarrow B[x_B, 8 - x_B],\ C[x_C, 8 - x_C]$

$|AO| = \sqrt{(1+2)^2 + (2+2)^2} = 5$

$|BO| = |AO| = 5$

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-x_B)^2 + (2-8+x_B)^2} &= 5 \\ x_B^2 - 2x_B + 1 + x_B^2 - 12x_B + 36 &= 25 \\ x_B^2 - 7x_B + 6 &= 0 \\ (x_B - 1)(x_B - 6) &= 0 \end{aligned}$$

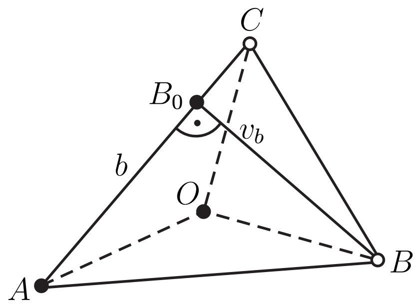
Stejnou rovnici a tedy i stejná řešení dostaneme pro neznámou x_C, proto:

je-li $x_B = 1$, je $x_C = 6$, $y_B = 7$, $y_C = 2$,

je-li $x_B = 6$, je $x_C = 1$, $y_B = 2$, $y_C = 7$.

♠ **Výsledek:** $B[1,7]$ a $C[6,2]$, nebo $B[6,2]$ a $C[1,7]$.

■ **Příklad 15:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[2,3]$, patu $B_0[3,5]$ výšky BB_0 a střed $O[6,6]$ kružnice opsané.



Rozbor: Vrchol B leží na přímce v_b procházející bodem B_0 kolmo k $\overrightarrow{AB_0}$, vrchol C leží na přímce b procházející body A, B_0. K výpočtu neznámých souřadnic vrcholů B i C nakonec využijeme toho, že vzdálenosti $|BO|$ a $|CO|$ mají danou velikost $|AO|$.

Výpočet: $\overrightarrow{AB_0} = (1,2)$

$b: X = [2,3] + t \cdot (1,2), t \in \mathbb{R}; \quad C \in b \Rightarrow C[2+t, 3+2t]$

$v_b: x + 2y - 13 = 0; \quad B \in v_b \Rightarrow B[13 - 2y_B, y_B]$

$|AO| = \sqrt{(6-2)^2 + (6-3)^2} = 5$

$$\begin{aligned} |BO| &= |AO| \\ \sqrt{(6-13+2y_B)^2 + (6-y_B)^2} &= 5 \\ 49 - 28y_B + 4y_B^2 + 36 - 12y_B + y_B^2 &= 25 \\ y_B^2 - 8y_B + 12 &= 0 \\ (y_B - 2)(y_B - 6) &= 0 \end{aligned}$$

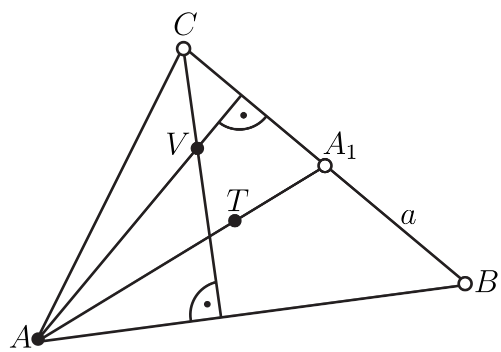
Pro $y_B = 2$ je $x_B = 9$, resp. pro $y_B = 6$ je $x_B = 1$.

$$\begin{aligned} |CO| &= |AO| \\ \sqrt{(6-2-t)^2 + (6-3-2t)^2} &= 5 \\ 16 - 8t + t^2 + 9 - 12t + 4t^2 &= 25 \\ t^2 - 20t &= 0 \\ t(t-4) &= 0 \end{aligned}$$

Pro $t = 0$ je $C = A$, vyhovuje tedy pouze $t = 4$, čemuž odpovídá $C[6,11]$.

♠ **Výsledek:** $B[9,2]$ a $C[6,11]$, nebo $B[1,6]$ a $C[6,11]$.

■ **Příklad 16*:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[-3, 3]$, těžiště $T[5, 5]$ a průsečík výšek $V[3, 3]$.



Rozbor: Z rovnosti $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TA_1}$ lze jednoduchou úpravou odvodit $A_1 = \frac{3}{2}T - \frac{1}{2}A$. Vrcholy B, C leží na přímce a procházející bodem A_1 kolmo k $\overrightarrow{AV}$, bod A_1 je navíc střed úsečky BC, proto platí $C = 2A_1 - B$. K výpočtu neznámých souřadnic vrcholů B, C využijeme vztah $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{VC} = 0$.

Výpočet: $A_1 = \frac{3}{2}T - \frac{1}{2}A = \frac{3}{2}[5, 5] - \frac{1}{2}[-3, 3] = [9, 6]$

$\overrightarrow{AV} = (6, 0) \parallel (1, 0)$

$a : x - 9 = 0\,, \quad B \in a \Rightarrow B[9, y_B]$

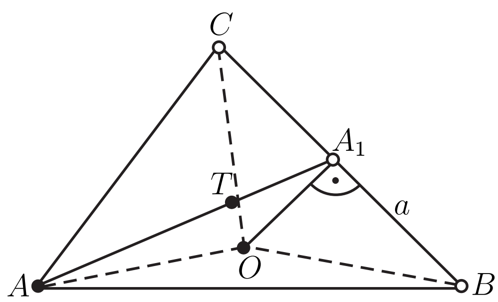
$C = 2A_1 - B = 2[9, 6] - [9, y_B] = [9, 12 - y_B]$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{VC} &= 0 \\
(12, y_B - 3) \cdot (6, 12 - y_B - 3) &= 0 \\
72 - y_B^2 + 12y_B - 27 &= 0 \\
y_B^2 - 12y_B - 45 &= 0 \\
(y_B - 15)(y_B + 3) &= 0
\end{aligned}$$

Pro $y_B = 15$ je $y_C = -3$, pro $y_B = -3$ je $y_C = 15$.

♠ **Výsledek:** $B[9, 15]$ a $C[9, -3]$, nebo $B[9, -3]$ a $C[9, 15]$.

■ **Příklad 17:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[1,0]$, těžiště $T\left[5,\frac{8}{3}\right]$ a střed $O[5,3]$ kružnice opsané.



Rozbor: Jednoduchou úpravou rovnosti $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TA_1}$ dostaneme $A_1 = \frac{3}{2}T - \frac{1}{2}A$. Vrcholy B, C leží na přímce a procházející bodem A_1 kolmo k $\overrightarrow{AV}$, bod A_1 je navíc střed úsečky BC, proto platí $C = 2A_1 - B$. K výpočtu neznámých souřadnic vrcholů B, C nakonec využijeme toho, že vzdálenosti $|BO|$ a $|CO|$ mají danou velikost $|AO|$.

Výpočet: $A_1 = \frac{3}{2}T - \frac{1}{2}A = \frac{3}{2}\left[5,\frac{8}{3}\right] - \frac{1}{2}[1,0] = [7,4]$

$\overrightarrow{OA_1} = (2,1)$

$a: 2x + y - 18 = 0\,;\quad B \in a \Rightarrow B[x_B, 18 - 2x_B]$

$C = 2A_1 - B = 2[7,4] - [x_B, 18 - 2x_B] = [14 - x_B, -10 + 2x_B]$

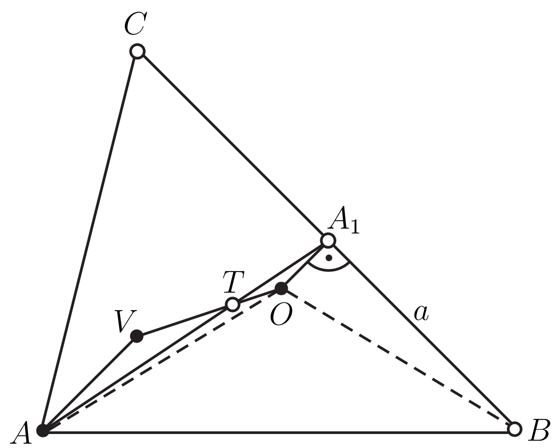
$|AO| = \sqrt{(5-1)^2 + 3^2} = 5$

$$
\begin{aligned}
|BO| &= |AO| \\
\sqrt{(5-x_B)^2 + (3 - 18 + 2x_B)^2} &= 5 \\
25 - 10x_B + x_B^2 + 225 - 60x_B + 4x_B^2 &= 25 \\
x_B^2 - 14x_B + 45 &= 0 \\
(x_B - 9)(x_B - 5) &= 0
\end{aligned}
$$

Pro $x_B = 9$ je $y_B = 0$, $x_C = 5$, $y_C = 8$, pro $x_B = 5$ je $y_B = 8$, $x_C = 9$, $y_C = 0$.

♠ **Výsledek:** $B[9,0]$ a $C[5,8]$, nebo $B[5,8]$ a $C[9,0]$.

■ **Příklad 18*:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[3,-1]$, průsečík výšek $V[4,2]$ a střed $O[6,3]$ kružnice opsané.



Rozbor: Z podobnosti trojúhelníků AVT a A_1OT a z vlastnosti $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TA_1}$ pro těžiště, vrchol a střed protější strany plyne vztah $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{OA_1}$, jehož úpravou dostaneme rovnost $A_1 = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}A + O$. Vrcholy B, C leží na přímce a procházející bodem A_1 kolmo k $\overrightarrow{AV}$, bod A_1 je navíc střed úsečky BC, platí tedy $C = 2A_1 - B$. K výpočtu souřadnic vrcholu B využijeme toho, že vzdálenost $|BO|$ má danou velikost $|AO|$.

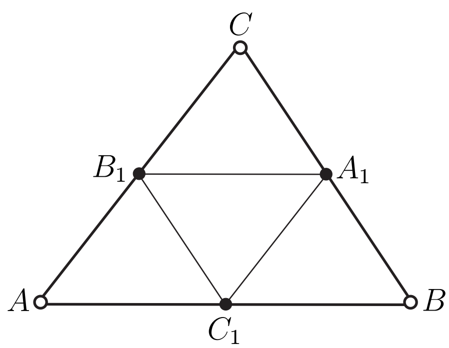
Výpočet: $A_1 = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}A + O = \frac{1}{2}[4,2] - \frac{1}{2}[3,-1] + [6,3] = \left[\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right]$
$\overrightarrow{AV} = (1,3)$
$a: x + 3y - 20 = 0\,; \quad B \in a \Rightarrow B[20 - 3y_B, y_B]$
$C = 2A_1 - B = 2\left[\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right] - [20 - 3y_B, y_B] = [-7 + 3y_B, 9 - y_B]$
$|AO| = \sqrt{(6-3)^2 + (3+1)^2} = 5$

$$\begin{aligned}
|BO| &= |AO| \\
\sqrt{(6 - 20 + 3y_B)^2 + (3 - y_B)^2} &= 5 \\
196 - 84y_B + 9y_B^2 + 9 - 6y_B + y_B^2 &= 25 \\
y_B^2 - 9y_B + 18 &= 0 \\
(y_B - 3)(y_B - 6) &= 0
\end{aligned}$$

Pro $y_B = 3$ je $x_B = 11$, $x_C = 2$, $y_C = 6$, pro $y_B = 6$ je$x_B = 2$, $x_C = 11$, $y_C = 3$.

♠ **Výsledek:** $B[11,3]$ a $C[2,6]$, nebo $B[2,6]$ a $C[11,3]$.

■ **Příklad 19:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte střed $A_1[4,1]$ strany BC, střed $B_1[-1,2]$ strany AC a střed $C_1[1,-4]$ strany AB.



Rozbor: Úsečky A_1B_1, B_1C_1 a C_1A_1 jsou střední příčky $\triangle ABC$ po řadě rovnoběžné se stranami AB, BC a CA. Čtyřúhelníky $AB_1A_1C_1$, $BA_1B_1C_1$ a $CA_1C_1B_1$ jsou tedy rovnoběžníky. Z vlastností rovnoběžníku $AB_1A_1C_1$ plyne $A = C_1 + \overrightarrow{A_1B_1}$. Podobně z vlastností rovnoběžníku $BA_1B_1C_1$, resp. $CA_1C_1B_1$, plyne $B = A_1 + \overrightarrow{B_1C_1}$, resp. $C = B_1 + \overrightarrow{C_1A_1}$.

Výpočet: $A = C_1 + \overrightarrow{A_1B_1} = C_1 + B_1 - A_1 = [1,-4] + [-1,2] - [4,1] = [-4,-3]$
$B = A_1 + \overrightarrow{B_1C_1} = A_1 + C_1 - B_1 = [4,1] + [1,-4] - [-1,2] = [6,-5]$
$C = B_1 + \overrightarrow{C_1A_1} = B_1 + A_1 - C_1 = [-1,2] + [4,1] - [1,-4] = [2,7]$

♠ **Výsledek:** $A[-4,-3]$, $B[6,-5]$, $C[2,7]$.

Jiné řešení: Body A_1, B_1 a C_1 jsou po řadě středy úseček BC, AC a AB. Platí tedy vztahy $A + B = 2C_1$, $A + C = 2B_1$ a $B + C = 2A_1$, z nichž získáme 6 rovnic se šesti neznámými, hledanými souřadnicemi vrcholů.

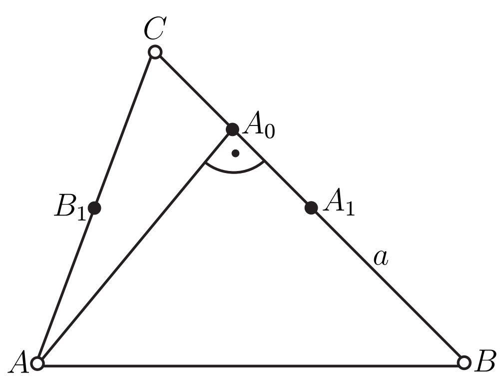
Výpočet:

$$
\begin{aligned}
x_A + x_B &= 2\\
x_A + x_C &= -2\\
x_B + x_C &= 8\\
y_A + y_B &= -8\\
y_A + y_C &= 4\\
y_B + y_C &= 2
\end{aligned}
$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$x_A = -4$, $x_B = 6$, $x_C = 2$, $y_A = -3$, $y_B = -5$, $y_C = 7$.

■ **Příklad 20:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte střed $A_1[4, -1]$ strany BC, střed $B_1[0, 0]$ strany AC a patu $A_0[2, 1]$ výšky AA_0.



Rozbor: Vrcholy B, C leží na přímce a procházející body A_1, A_0, bod A_1 je přitom střed úsečky BC, můžeme tedy psát $B = A_1 + t \cdot \overrightarrow{A_1A_0}$, $C = A_1 - t \cdot \overrightarrow{A_1A_0}$. Bod B_1 je střed úsečky AC, paltí tedy $A = 2B_1 - C$. Neznámý parametr t z vyjádření souřadnic všech tří vrcholů dopočítáme ze vztahu $\overrightarrow{AA_0} \cdot \overrightarrow{A_1A_0} = 0$.

Výpočet: $\overrightarrow{A_1A_0} = (-2, 2)$

$B = A_1 + t \cdot \overrightarrow{A_1A_0} = [4 - 2t, -1 + 2t]$; $\quad C = A_1 - t \cdot \overrightarrow{A_1A_0} = [4 + 2t, -1 - 2t]$

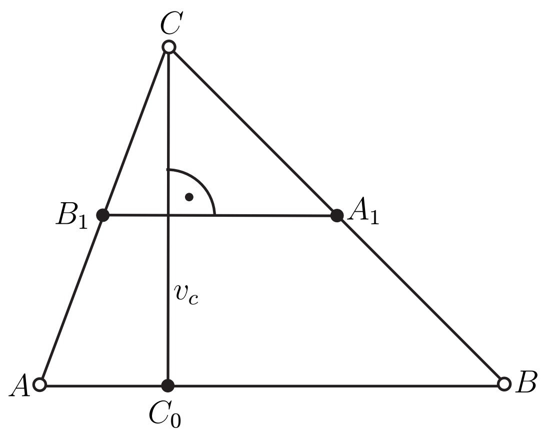
$A = 2B_1 - C = 2[0, 0] - [4 + 2t, -1 - 2t] = [-4 - 2t, 1 + 2t]$

$\overrightarrow{AA_0} = A_0 - A = (6 + 2t, -2t)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA_0} \cdot \overrightarrow{A_1A_0} &= 0 \\ (6 + 2t, -2t) \cdot (-2, 2) &= 0 \\ -12 - 4t - 4t &= 0 \\ t &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

♠ **Výsledek:** $A[-1, -2]$, $B[7, -4]$, $C[1, 2]$.

■ **Příklad 21:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte střed $A_1[11,6]$ stran BC, střed $B_1[3,10]$ strany AC a patu $C_0[2,3]$ výšky CC_0.



Rozbor: Vrchol C leží na přímce v_c procházející bodem C_0 kolmo k $\overrightarrow{A_1B_1}$, známe tedy některý její směrový vektor $\vec{v} \perp \overrightarrow{A_1B_1}$ a platí $C = C_0 + t \cdot \vec{v}$. Bod B_1 je střed úsečky AC, proto je $A = 2B_1 - C$. Podobně A_1 je střed úsečky BC, proto platí $B = 2A_1 - C$. Neznámý parametr t dopočítáme ze vztahu $\overrightarrow{AC_0} \cdot \vec{v} = 0$, neboť je $\overrightarrow{AC_0} \parallel \overrightarrow{A_1B_1}$.

Výpočet: $\overrightarrow{A_1B_1} = (-8,4) \Rightarrow \vec{v} = (1,2)$
$C = C_0 + t \cdot \vec{v} = [2,3] + t(1,2) = [2+t, 3+2t]$
$A = 2B_1 - C = 2[3,10] - [2+t, 3+2t] = [4-t, 17-2t]$
$B = 2A_1 - C = 2[11,6] - [2+t, 3+2t] = [20-t, 9-2t]$
$\overrightarrow{AC_0} = C_0 - A = [2,3] - [4-t, 17-2t] = (-2+t, -14+2t)$

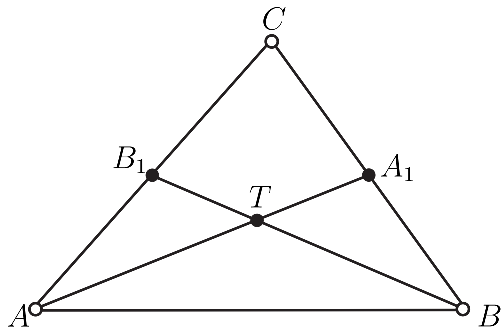
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC_0} \cdot \vec{v} &= 0\\
(-2+t, -14+2t) \cdot (1,2) &= 0\\
-2+t-28+4t &= 0\\
t &= 6 \quad \Rightarrow x_A = -2,\ y_A = 5,\ x_B = 14,\ y_B = -3,\ x_C = 8,\ y_C = 15
\end{aligned}$$

♠ **Výsledek:** $A[-2,5]$, $B[14,-3]$, $C[8,15]$.

Jiné řešení: Protože A_1B_1 je střední příčka $\triangle ABC$ rovnoběžná se stranou AB a C_0 je pata kolmice v_c spuštěné z vrcholu C na stranu AB, je vrchol C souměrně sdružený s bodem C_0 podle osy o procházející body A_1, B_1. Při hledání souřadnic vrcholu C tedy můžeme využít rovnice souměrnosti (v rovině) podle přímky.[2] Vrcholy A, B bychom pak určili stejně jako v předchozím postupu.

[2]Připomeňme, že rovnice souměrnosti podle nadroviny $\varrho : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ v obecném eukleidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ jsou: $x_i' = x_i - \dfrac{2a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a),\ i = 1, \ldots, n.$

■ **Příklad 22:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte střed $A_1[14, 12]$ strany BC, střed $B_1[5, 14]$ strany AC a těžiště $T[8, 10]$.



Rozbor: Z vlastností těžnic plynou vztahy: $A = T + 2\overrightarrow{A_1T}$, $B = T + 2\overrightarrow{B_1T}$. Bod A_1 je střed úsečky BC, proto platí $C = 2A_1 - B$.

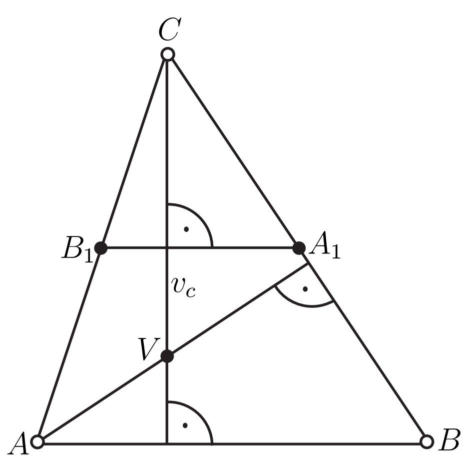
Výpočet: $A = T + 2\overrightarrow{A_1T} = 3T - 2A_1 = 3[8, 10] - 2[14, 12] = [-4, 6]$

$B = T + 2\overrightarrow{B_1T} = 3T - 2B_1 = 3[8, 10] - 2[5, 14] = [14, 2]$

$C = 2A_1 - B = 2[14, 12] - [14, 2] = [14, 22]$

♠ **Výsledek:** $A[-4, 6]$, $B = [14, 2]$ a $C = [14, 22]$.

■ **Příklad 23*:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte střed $A_1[9, 7]$ strany BC, střed $B_1[4, 7]$ strany AC a ortocentrum $V[7, 8]$.



Rozbor: Vrchol C leží na přímce v_c jdoucí bodem V kolmo k $\overrightarrow{A_1B_1}$, můžeme jej proto vyjádřit jako obecný bod této přímky. Bod B_1 je střed úsečky AC, platí tedy vztah $A = 2B_1 - C$. Podobně je $B = 2A_1 - C$. Souřadnice vrcholu C i vrcholů A, B vyjádřených pomocí souřadnic C dopočítáme ze vztahu $\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{CA_1} = 0$.

Výpočet: $\overrightarrow{A_1B_1} = (-5, 0)$

$v_c : x - 7 = 0\,; \quad C \in v_c \Rightarrow \ C[7, y_C]$

$A = 2B_1 - C = 2[4,7] - [7, y_C] = [1, 14 - y_C]$

$B = 2A_1 - C = 2[9,7] - [7, y_C] = [11, 14 - y_C]$

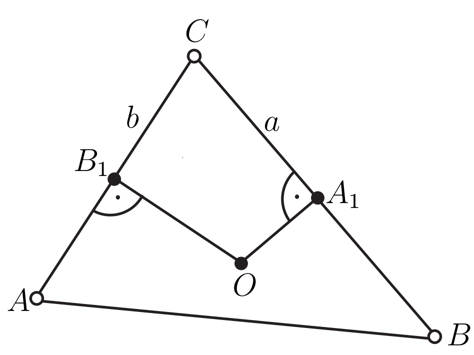
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{CA_1} &= 0 \\ (6, y_C - 6) \cdot (2, 7 - y_C) &= 0 \\ 12 - 42 + 13y_C - y_C^2 &= 0 \\ y_C^2 - 13y_C + 30 &= 0 \\ (y_C - 3)(y_C - 10) &= 0 \end{aligned}$$

Pro $y_C = 3$ je $y_A = 11$, $y_B = 11$, pro $y_C = 10$ je $y_A = 4$, $y_B = 4$.

♠ **Výsledek:** $A[1, 11]$, $B[11, 11]$ a $C[7, 3]$, nebo $A[1, 4]$, $B[11, 4]$ a $C[7, 10]$.

Jiné řešení: Z vlastnosti středních příček plyne $B = A + 2 \cdot \overrightarrow{B_1A_1}$. Vrchol C můžeme vyjádřit vztahem $C = 2B_1 - A$, neboť je B_1 střed úsečky AC. Tak všechny tři vrcholy A, B, C vyjádříme pomocí dvou neznámých x_A, y_A. Tyto neznámé vypočítáme, když využijeme vztahů $\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{VC} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0$, které bezprostředně plynou z vlastností výšek a středních příček v trojúhelníku.

■ **Příklad 24:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte střed $A_1[4, 3]$ strany BC, střed $B_1\left[\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ strany AC a střed $O[3, 1]$ kružnice opsané.



Rozbor: Vrchol C určíme jako průsečík přímek a, b. Přímka a prochází bodem A_1 kolmo k $\overrightarrow{OA_1}$, přímka b prochází bodem B_1 kolmo k $\overrightarrow{OB_1}$. Bod B_1 je střed úsečky AC, proto platí $A = 2B_1 - C$. Podobně je $B = 2A_1 - C$.

Výpočet: $\overrightarrow{OA_1} = (1,2) \overset{A_1 \in a}{\Rightarrow} a: x + 2y - 10 = 0$

$\overrightarrow{OB_1} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \parallel (1,-3) \overset{B_1 \in b}{\Rightarrow} b: x - 3y - 5 = 0$

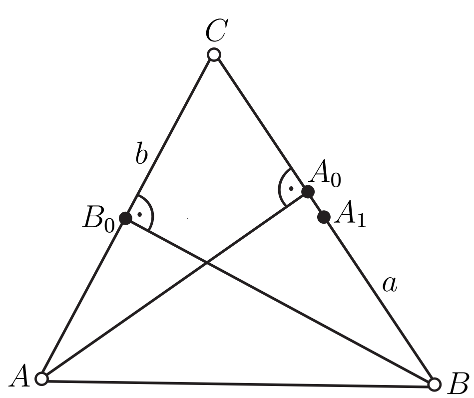
$$\begin{aligned} C \in a \cap b \;\Rightarrow\; x_C + 2y_C - 10 &= 0 \\ \underline{x_C - 3y_C - 5} &\underline{= 0} \\ 5y_C - 5 &= 0 \\ y_C &= 1 \quad \Rightarrow x_C = 8 \end{aligned}$$

$A = 2B_1 - C = 2\left[\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right] - [8,1] = [-1,-2]$

$B = 2A_1 - C = 2[4,3] - [8,1] = [0,5]$

♠ **Výsledek:** $A[-1,-2]$, $B[0,5]$, $C[8,1]$.

■ **Příklad 25:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte střed $A_1[8,7]$ strany BC, patu $A_0[9,5]$ výšky AA_0 a patu $B_0[2,4]$ výšky BB_0.



Rozbor: Vrcholy B, C leží na přímce a procházející body A_1, A_0. Bod A_1 je střed úsečky BC, proto platí $B = A_1 + t \cdot \overrightarrow{A_1A_0}$, $C = A_1 - t \cdot \overrightarrow{A_1A_0}$. Neznámý parametr t dopočítáme ze vztahu $\overrightarrow{B_0B} \cdot \overrightarrow{B_0C} = 0$. Zbylý vrchol A leží na přímce b procházející body B_0, C. Platí tedy $A = B_0 + s \cdot \overrightarrow{CB_0}$ pro vhodné $s \in \mathbb{R}$, k jehož výpočtu využijeme vztah $\overrightarrow{AA_0} \cdot \overrightarrow{A_1A_0} = 0$.

Výpočet: $\overrightarrow{A_1A_0} = (1,-2)$

$B = A_1 + t \cdot \overrightarrow{A_1A_0} = [8+t, 7-2t]$

$C = A_1 - t \cdot \overrightarrow{A_1A_0} = [8-t, 7+2t]$

$\overrightarrow{B_0B} = (6+t, 3-2t)$

$\overrightarrow{B_0C} = (6-t, 3+2t)$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B_0B} \cdot \overrightarrow{B_0C} &= 0\\
(6+t, 3-2t) \cdot (6-t, 3+2t) &= 0\\
36 - t^2 + 9 - 4t^2 &= 0\\
t^2 &= 9\\
t &= \pm\, 3
\end{aligned}$$

i) Pro $t = 3$ je $B[11, 1]$, $C[5, 13]$.
$\overrightarrow{CB_0} = (-3, -9)$
$A = B_0 + s \cdot \overrightarrow{CB_0} = [2 - 3s, 4 - 9s]$
$\overrightarrow{AA_0} = (7 + 3s, 1 + 9s)$

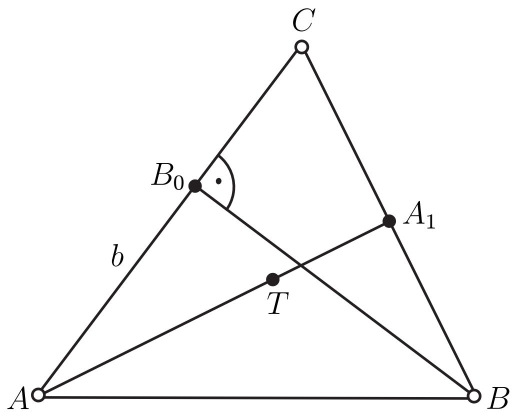
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AA_0} \cdot \overrightarrow{A_1A_0} &= 0\\
(7+3s, 1+9s) \cdot (1, -2) &= 0\\
7 + 3s - 2 - 18s &= 0\\
s &= \tfrac{1}{3} \Rightarrow x_A = 1,\ y_A = 1
\end{aligned}$$

ii) Pro $t = -3$ je $B[5, 13]$, $C[11, 1]$.
$\overrightarrow{CB_0} = (-9, 3)$
$A = B_0 + s \cdot \overrightarrow{CB_0} = [2 - 9s, 4 + 3s]$
$\overrightarrow{AA_0} = (7 + 9s, 1 - 3s)$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AA_0} \cdot \overrightarrow{A_1A_0} &= 0\\
(7+9s, 1-3s) \cdot (1, -2) &= 0\\
7 + 9s - 2 + 6s &= 0\\
s &= -\tfrac{1}{3} \Rightarrow x_A = 5,\ y_A = 3
\end{aligned}$$

♠ **Výsledek:** $A[1, 1]$, $B[11, 1]$ a $C[5, 13]$, nebo $A[5, 3]$, $B[5, 13]$ a $C[11, 1]$.

■ **Příklad 26:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte střed $A_1[-3,3]$ strany BC, patu $B_0[-1,4]$ výšky BB_0 a těžiště $T[-1,2]$.



Rozbor: Z rovnosti $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TA_1}$ lehce odvodíme vztah $A = 3T - 2A_1$. Vrchol C leží na přímce b procházející body A, B_0, proto je $C = A + t \cdot \overrightarrow{AB_0}$. Bod A_1 je střed úsečky BC, platí tedy $B = 2A_1 - C$. Neznámý parametr t z vyjádření souřadnic vrcholů B, C dopočítáme ze vztahu $\overrightarrow{BB_0} \cdot \overrightarrow{AB_0} = 0$.

Výpočet: $A = 3T - 2A_1 = 3[-1,2] - 2[-3,3] = [3,0]$

$\overrightarrow{AB_0} = (-4,4)$

$C = A + t \cdot \overrightarrow{AB_0} = [3,0] + t(-4,4) = [3-4t, 4t]$

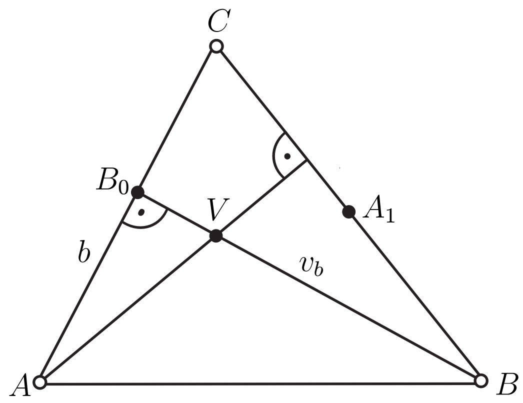
$B = 2A_1 - C = 2[-3,3] - [3-4t, 4t] = [-9+4t, 6-4t]$

$\overrightarrow{BB_0} = (8-4t, -2+4t)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BB_0} \cdot \overrightarrow{AB_0} &= 0 \\ (8-4t, -2+4t) \cdot (-4,4) &= 0 \\ -32 + 16t - 8 + 16t &= 0 \\ t &= \tfrac{5}{4} \Rightarrow x_B = -4,\ y_B = 1,\ x_C = -2,\ y_C = 5 \end{aligned}$$

♠ **Výsledek:** $A[3,0]$, $B[-4,1]$, $C[-2,5]$.

■ **Příklad 27:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte střed $A_1[-2, 8]$ strany BC, patu $B_0[-2, 3]$ výšky BB_0 a ortocentrum $V[0, 7]$.



Rozbor: Vrchol B leží na přímce v_b procházející body B_0, V, platí tedy $B = B_0 + t \cdot \overrightarrow{B_0V}$. Bod A_1 je střed úsečky BC, proto platí $C = 2A_1 - B$. K výpočtu neznámého parametru t z vyjádření souřadnic vrcholů B, C využijeme rovnost $\overrightarrow{CB_0} \cdot \overrightarrow{B_0V} = 0$. Zbylý vrchol A leží v průsečíku přímky b, jež prochází bodem B_0 kolmo k $\overrightarrow{B_0V}$, s přímkou v_a, jež prochází bodem V kolmo k $\overrightarrow{BC}$.

Výpočet: $\overrightarrow{B_0V} = (2, 4)$

$B = B_0 + t \cdot \overrightarrow{B_0V} = [-2 + 2t, 3 + 4t]\,; \quad C = 2A_1 - B = [-2 - 2t, 13 - 4t]$

$\overrightarrow{CB_0} = (2t, -10 + 4t)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CB_0} \cdot \overrightarrow{B_0V} &= 0 \\ (2t, -10 + 4t) \cdot (2, 4) &= 0 \\ 4t - 40 + 16t &= 0 \\ 20t = 40 &= 0 \\ t &= 2 \ \Rightarrow B[2, 11],\ C[-6, 5] \end{aligned}$$

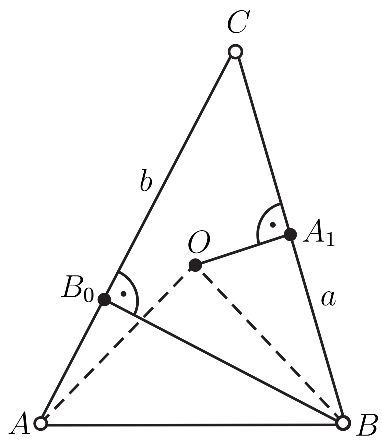
$\overrightarrow{BC} = (-8, -6)$

$b : x + 2y - 4 = 0\,; \quad v_a : 4x + 3y - 21 = 0$

$$\begin{aligned} A \in b \cap v_a : \quad x_A + 2y_A - \ \ 4 &= 0 \\ \underline{4x_A + 3y_A - 21} &\underline{= 0} \\ -5y_A - \ \ 5 &= 0 \\ y_A = -\,1 \Rightarrow x_A &= 6 \end{aligned}$$

♠ **Výsledek:** $A[6, -1]$, $B[2, 11]$, $C[-6, 5]$.

■ **Příklad 28:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte střed $A_1[3,7]$ strany AA_1, patu $B_0[1,3]$ výšky BB_0 a střed $O[2,5]$ kružnice opsané.



Rozbor: Vrcholy B, C leží na přímce a procházející bodem A_1 kolmo k $\overrightarrow{OA_1}$, známe tedy některý její směrový vektor $\vec{u} \perp \overrightarrow{OA_1}$. Bod A_1 je navíc střed úsečky BC, proto platí $B = A_1 + t \cdot \vec{u}$, $C = A_1 - t \cdot \vec{u}$ pro vhodný parametr $t \in \mathbb{R}$, který dopočítáme ze vztahu $\overrightarrow{B_0B} \cdot \overrightarrow{B_0C} = 0$. Vrchol A leží na přímce b procházející body C, B_0, proto je $A = C + s \cdot \overrightarrow{B_0C}$ pro vhodné $s \in \mathbb{R}$, jež dopočítáme ze vztahu $|OA| = |OB|$.

Výpočet: $\overrightarrow{OA_1} = (1,2) \Rightarrow \vec{u} = (2,-1)$

$B = A_1 + t \cdot \vec{u} = [3+2t, 7-t]$

$C = A_1 - t \cdot \vec{u} = [3-2t, 7+t]$

$\overrightarrow{B_0B} = (2+2t, 4-t)$

$\overrightarrow{B_0C} = (2-2t, 4+t)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B_0B} \cdot \overrightarrow{B_0C} &= 0 \\ (2+2t, 4-t) \cdot (2-2t, 4+t) &= 0 \\ 4 - 4t^2 + 16 - t^2 &= 0 \\ t^2 &= 4 \\ t &= \pm 2 \end{aligned}$$

i) $t = 2 \Rightarrow B[7,5]$, $C[-1,9]$, $\overrightarrow{B_0C} = (-2,6)$

$A = B + s \cdot \overrightarrow{B_0C} = [7-2s, 5+6s]$

$|OA| = \sqrt{(7-2s-2)^2 + (5+6s-5)^2} = \sqrt{25 - 20s + 4s^2 + 36s^2}$

$|OB| = \sqrt{(7-2)^2 + (5-5)^2} = 5$

$$
\begin{aligned}
|OA| &= |OB| \\
\sqrt{40s^2 - 20s + 25} &= 5 \\
40s^2 - 20s + 25 &= 25 \\
s(2s-1) &= 0
\end{aligned}
$$

Pro $s = 0$ je $A = C$, tento kořen tedy není řešením. Pro $s = \frac{1}{2}$ je $A[6, 8]$.

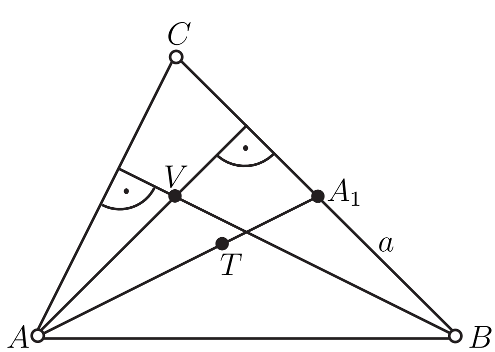
ii) $t = -2 \Rightarrow B[-1, 9]$, $C[7, 5]$, $\overrightarrow{B_0C} = (6, 2)$
$A = B + s \cdot \overrightarrow{B_0C} = [7 + 6s, 5 + 2s]$
$|OA| = \sqrt{(7 + 6s - 2)^2 + (5 + 2s - 5)^2} = \sqrt{25 + 60s + 36s^2 + 4s^2}$
$|OB| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$$
\begin{aligned}
|OA| &= |OB| \\
\sqrt{40s^2 + 60s + 25} &= 5 \\
40s^2 + 60s + 25 &= 25 \\
s(2s+3) &= 0
\end{aligned}
$$

Kořen $s = 0$ musíme opět vyloučit, pro $s = -\frac{3}{2}$ je $A[-2, 2]$.

♠ **Výsledek:** $A[6, 8]$, $B[7, 5]$ a $C[-1, 9]$, nebo $A[-2, 2]$, $B[-1, 9]$ a $C[7, 5]$.

■ **Příklad 29:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte střed $A_1[15, 6]$ strany BC, těžiště $T[2, -5]$ a ortocentrum $V[6, 3]$.



Rozbor: Z rovnosti $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TA_1}$ odvodíme vztah $A = 3T - 2A_1$. Vrcholy B, C leží na přímce a procházející bodem A_1 kolmo k $\overrightarrow{AV}$, známe tedy i některý její směrový vektor $\vec{u} \perp \overrightarrow{AV}$. Bod A_1 je střed úsečky BC, proto platí $B = A_1 + t \cdot \vec{u}$, $C = A_1 - t \cdot \vec{u}$. Parametr t dopočítáme ze vztahu $\overrightarrow{BV} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

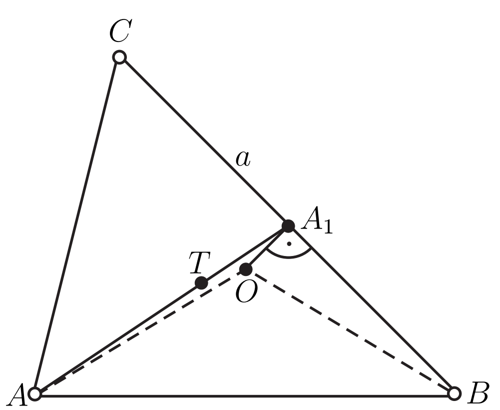
Výpočet: $A = 3T - 2A_1 = [-24, -27]$
$\overrightarrow{AV} = (30, 30) \Rightarrow \vec{u} = (1, -1)$
$B = A_1 + t \cdot \vec{u} = [15 + t, 6 - t]$
$C = A_1 - t \cdot \vec{u} = [15 - t, 6 + t]$
$\overrightarrow{BV} = (-9 - t, -3 + t)$
$\overrightarrow{AC} = (39 - t, 33 + t)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BV} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ (-9 - t, -3 + t)(39 - t, 33 + t) &= 0 \\ -351 - 30t + t^2 - 99 + 30t + t^2 &= 0 \\ 2t^2 - 450 &= 0 \\ t &= \pm 15 \end{aligned}$$

Pro $t = 15$ je $B[30, -9]$, $C[0, 21]$, pro $t = -15$ je $B[0, 21]$, $C[30, -9]$.

♠ **Výsledek:** $A[-24, -27]$, $B[30, -9]$ a $C[0, 21]$, nebo $A[-24, -27]$, $B[0, 21]$ a $C[30, -9]$.

■ **Příklad 30:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte střed $A_1[9, 4]$ strany BC, těžiště $T\left[7, \frac{8}{3}\right]$ a střed $O[7, 3]$ kružnice opsané.



Rozbor: Z rovnosti $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TA_1}$ odvodíme vztah $A = 3T - 2A_1$. Vrcholy B, C leží na přímce a procházející bodem A_1 kolmo k $\overrightarrow{A_1O}$, známe tedy i některý směrový vektor $\vec{u} \perp \overrightarrow{A_1O}$ přímky a. Bod A_1 je střed úsečky BC, platí tedy $B = A_1 + t\vec{u}$, $C = A_1 - t\vec{u}$. Parametr t dopočítáme ze vztahu $|BO| = |AO|$.

Výpočet: $A = 3T - 2A_1 = [3, 0]$
$\overrightarrow{A_1O} = (-2, -1) \Rightarrow \vec{u} = (1, -2)$

$B = A_1 + t \cdot \vec{u} = [9 + t, 4 - 2t]$

$C = A_1 - t \cdot \vec{u} = [9 - t, 4 + 2t]$

$|AO| = \sqrt{(7-3)^2 + (3-0)^2} = 5$

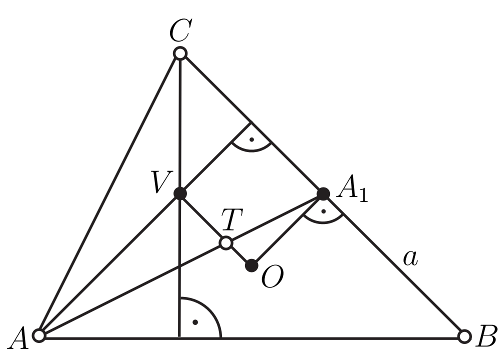
$|BO| = \sqrt{(7-9-t)^2 + (3-4+2t)^2}$

$$\begin{aligned} |BO| &= |AO| \\ \sqrt{(-2-t)^2 + (-1+2t)^2} &= 5 \\ 4 + 4t + t^2 + 1 - 4t + 4t^2 &= 25 \\ 5t^2 - 20 &= 0 \\ t &= \pm 2 \end{aligned}$$

Pro $t = 2$ je $B[11, 0]$, $C[7, 8]$, pro $t = -2$ je $B[7, 8]$, $C[11, 0]$.

♠ **Výsledek:** $A[3, 0]$, $B[11, 0]$ a $C[7, 8]$, nebo $A[3, 0]$, $B[7, 8]$ a $C[11, 0]$.

■ **Příklad 31*:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte střed $A_1[8, 4]$ strany BC, ortocentrum $V[5, 3]$ a střed $O[7, 2]$ kružnice opsané.



Rozbor: Z podobnosti trojúhelníků AVT a A_1OT a z vlastnosti $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TA_1}$ plyne vztah $\overrightarrow{VA} = 2\overrightarrow{A_1O}$, jehož úpravou dostáváme $A = V + 2\overrightarrow{A_1O}$. Vrcholy B, C leží na přímce a procházející bodem A_1 kolmo k $\overrightarrow{A_1O}$, známe tedy i některý směrový vektor $\vec{u} \perp \overrightarrow{A_1O}$ přímky a. Bod A_1 je střed úsečky BC, platí tedy $B = A_1 + t\vec{u}$, $C = A_1 - t\vec{u}$. Parametr t dopočítáme ze vztahu $\overrightarrow{CV} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Výpočet: $\overrightarrow{A_1O} = (-1, -2) \Rightarrow \vec{u} = (2, -1)$

$A = V + 2\overrightarrow{A_1O} = [3, -1]$

$B = A_1 + t\vec{u} = [8 + 2t, 4 - t]$

$C = A_1 - t\vec{u} = [8 - 2t, 4 + t]$

$\overrightarrow{CV} = (-3 + 2t, -1 - t)$

$\overrightarrow{AB} = (5 + 2t, 5 - t)$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CV} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\
(-3 + 2t, -1 - t)(5 + 2t, 5 - t) &= 0 \\
-15 + 4t + 4t^2 - 5 - 4t + t^2 &= 0 \\
5t^2 - 20 &= 0 \\
t &= \pm\, 2
\end{aligned}$$

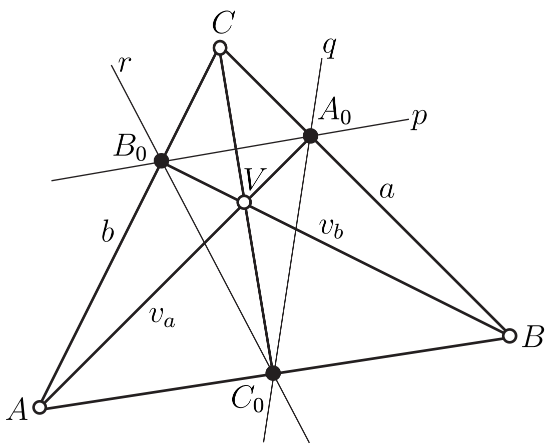
Pro $t = 2$ je $B[12, 2]$, $C[4, 6]$, pro $t = -2$ je $B[4, 6]$, $C[12, 2]$.

♠ **Výsledek:** $A[3, -1]$, $B[12, 2]$ a $C[4, 6]$, nebo $A[3, -1]$, $B[4, 6]$ a $C[12, 2]$.

■ **Příklad 32**:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte patu $A_0[5, 5]$ výšky AA_0, patu $B_0[-4, 2]$ výšky BB_0 a patu $C_0[0, -10]$ výšky CC_0.

Při řešení využijeme následujícího tvrzení: *V každém nepravoúhlém trojúhelníku ABC s patami výšek A_0, B_0, C_0 platí: přímky AA_0, BC jsou osami dvojice přímek A_0B_0, A_0C_0. Podobně přímky BB_0, AC (resp. CC_0, AB) jsou osami dvojice přímek A_0B_0, B_0C_0 (resp. A_0C_0, B_0C_0). Naopak v libovolném trojúhelníku $A_0B_0C_0$ se osy dvojic přímek A_0B_0, A_0C_0, B_0C_0 protínají ve čtyřech bodech tak, že každý ze čtyř průsečíků je ortocentrem trojúhelníku s vrcholy ve zbylých třech průsečících a body A_0, B_0, C_0 jsou paty výšek tohoto trojúhelníku. Tyto čtyři průsečíky tvoří střed kružnice vepsané trojúhelníku $A_0B_0C_0$ a středy kružnic připsaných stranám tohoto trojúhelníku.*

Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt např. v [8] na str. 42.



Rozbor: Obecné rovnice přímek A_0B_0, A_0C_0 a B_0C_0 po řadě označíme p, q, r. Známým postupem sestavíme rovnice os o_{pq}, o'_{pq} přímek p, q. Jedna z těchto os musí být přímkou a, na níž leží strana BC, druhá přímkou v_a, na níž leží výška AA_0. Podobným způsobem sestavíme rovnice os b, v_b přímek p, r. Vrcholy A, B, C pak určíme ze vztahů $A \in v_a \cap b$, $B \in a \cap v_b$ a $C \in a \cap b$.

Výpočet:

$$\overrightarrow{A_0B_0} = (-9, -3) \overset{A_0, B_0 \in p}{\Rightarrow} \quad p : x - 3y + 10 = 0$$
$$\overrightarrow{A_0C_0} = (-5, -15) \overset{A_0, C_0 \in q}{\Rightarrow} \quad q : 3x - y - 10 = 0$$
$$\overrightarrow{B_0C_0} = (4, -12) \overset{B_0, C_0 \in r}{\Rightarrow} \quad r : 3x + y + 10 = 0$$

$$o_{pq} : \frac{|x - 3y + 10|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|3x - y - 10|}{\sqrt{9 + 1}}$$

$$\alpha) \qquad \frac{x - 3y + 10}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{3x - y - 10}{\sqrt{9 + 1}}$$
$$2x + 2y - 20 = 0$$
$$o_{pq} : x + y - 10 = 0$$

$$\beta) \qquad \frac{x - 3y + 10}{\sqrt{1 + 9}} = -\frac{3x - y - 10}{\sqrt{9 + 1}}$$
$$4x - 4y = 0$$
$$o'_{pq} : x - y = 0$$

$$o_{pr} : \frac{|x - 3y + 10|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|3x + y + 10|}{\sqrt{9 + 1}}$$

$$\alpha) \qquad \frac{x - 3y + 10}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{3x + y + 10}{\sqrt{9 + 1}}$$
$$2x + 4y = 0$$
$$o_{pr} : x + 2y = 0$$

$$\beta) \qquad \frac{x-3y+10}{\sqrt{1+9}} = -\frac{3x+y+10}{\sqrt{9+1}}$$

$$4x-2y+20=0$$

$$o'_{pr}: 2x-y+10=0$$

$i)$ $o_{pq}=a$, $o'_{pq}=v_a$, $o_{pr}=b$, $o'_{pr}=v_b$

$$\begin{aligned} A\in v_a\cap b: \quad x_A - \ \ y_A &= 0 \\ \underline{x_A + 2y_A = 0} \\ 3y_A &= 0 \\ y_A &= 0 \ \Rightarrow x_A = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B\in a\cap v_b: \quad x_B + y_B - 10 &= 0 \\ \underline{2x_B - y_B + 10 = 0} \\ 3x_B &= 0 \\ x_B &= 0 \ \Rightarrow y_B = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C\in a\cap b: \quad x_C + \ \ y_C - 10 &= 0 \\ \underline{x_C + 2y_C \qquad = 0} \\ y_C + 10 &= 0 \\ y_C &= -10 \ \Rightarrow x_C = 20 \end{aligned}$$

$ii)$ $o_{pq}=a$, $o'_{pq}=v_a$, $o_{pr}=v_b$, $o'_{pr}=b$

$$\begin{aligned} A\in v_a\cap b: \quad x_A - y_A \qquad &= 0 \\ \underline{2x_A - y_A + 10 = 0} \\ x_A + 10 &= 0 \\ x_A &= -10 \ \Rightarrow y_A = -10 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B \in a \cap v_b: \quad & x_B + \;\; y_B - 10 = 0 \\
& \underline{x_B + 2y_B \qquad\;\; = 0} \\
& \qquad\quad\; y_B + 10 = 0 \\
& \qquad\qquad\; y_B = -\,10 \;\; \Rightarrow x_B = 20
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C \in a \cap b: \quad & x_C + y_C - 10 = 0 \\
& \underline{2x_C - y_C + 10 = 0} \\
& \qquad\quad\; 3x_C = 0 \\
& \qquad\qquad x_C = 0 \;\; \Rightarrow y_C = 10
\end{aligned}
$$

$iii)$ $o_{pq} = v_a$, $o'_{pq} = a$, $o_{pr} = b$, $o'_{pr} = v_b$

$$
\begin{aligned}
A \in v_a \cap b: \quad & x_A + \;\; y_A - 10 = 0 \\
& \underline{x_A + 2y_A \qquad\;\; = 0} \\
& \qquad\quad\; y_A + 10 = 0 \\
& \qquad\qquad\; y_A = -\,10 \;\; \Rightarrow x_A = 20
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B \in a \cap v_b: \quad & x_B - y_B \qquad\; = 0 \\
& \underline{2x_B - y_B + 10 = 0} \\
& \qquad\quad\; x_B + 10 = 0 \\
& \qquad\qquad\; x_B = -\,10 \;\; \Rightarrow y_B = -10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C \in a \cap b: \quad & x_C - \;\; y_C = 0 \\
& \underline{x_C + 2y_C = 0} \\
& \qquad\; 3y_C = 0 \\
& \qquad\;\; y_C = 0 \;\; \Rightarrow x_C = 0
\end{aligned}
$$

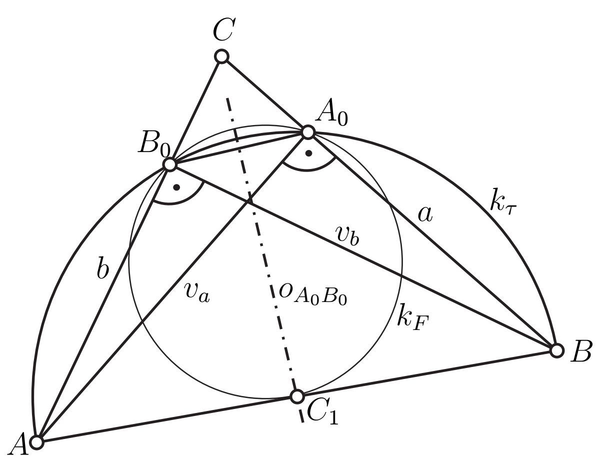
iv) $o_{pq} = v_a$, $o'_{pq} = a$, $o_{pr} = v_b$, $o'_{pr} = b$

$$
\begin{aligned}
A \in v_a \cap b: \quad x_A + y_A - 10 &= 0\\
\underline{2x_A - y_A + 10} &\underline{= 0}\\
3x_A &= 0\\
x_A &= 0 \;\Rightarrow y_A = 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B \in a \cap v_b: \quad x_B - \; y_B &= 0\\
\underline{x_B + 2y_B} &\underline{= 0}\\
3y_B &= 0\\
y_B &= 0 \;\Rightarrow x_B = 0
\end{aligned}
$$

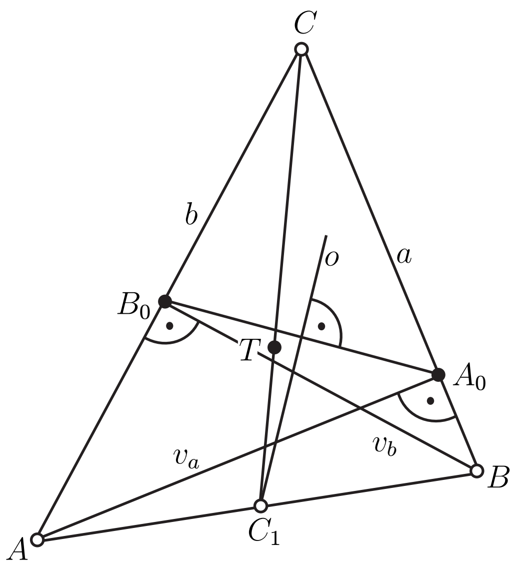
$$
\begin{aligned}
C \in a \cap b: \quad x_C - y_C \qquad &= 0\\
\underline{2x_C - y_C + 10} &\underline{= 0}\\
x_C + 10 &= 0\\
x_C &= - 10 \;\Rightarrow y_C = -10
\end{aligned}
$$

♠ **Výsledek:** $A[0,0]$, $B[0,10]$ a $C[20,-10]$, nebo $A[-10,-10]$, $B[20,-10]$ a $C[0,10]$, nebo $A[20,-10]$, $B[-10,-10]$ a $C[0,0]$, nebo $A[0,10]$, $B[0,0]$ a $C[-10,-10]$.



Jiné řešení: Na Feuerbachově kružnici leží jak paty výšek A_0, B_0, C_0, tak i středy stran A_1, B_1, C_1. Body A_0, B_0 (resp. A_0, C_0) leží také na Thaletově kružnici nad průměrem AB (resp. AC). Její střed C_1 (resp. B_1) tedy leží v průsečíku Feuerbachovy kružnice s osou úsečky A_0B_0 (resp. A_0C_0). Nyní již vrcholy lehce určíme.

■ **Příklad 33**:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte patu $A_0[4,0]$ výšky AA_0, patu $B_0[0,2]$ výškyBB_0 a těžiště $T[0,-2]$.



Rozbor: Střed C_1 úsečky AB leží na ose o úsečky A_0B_0, vyjádříme jej jako obecný bod této osy. Z vlastnosti těžiště plyne $C = C_1 + 3 \cdot \overrightarrow{C_1T} = 3T - 2C_1$. Vrchol A určíme jako průsečík přímek b, v_a, vrchol B určíme jako průsečík přímek a, v_b. Přímka a prochází body C, A_0, přímka b prochází body C, B_0, přímka v_a prochází bodem A_0 kolmo k $\overrightarrow{CA_0}$ a přímka v_b prochází bodem B_0 kolmo k $\overrightarrow{CB_0}$. Souřadnice bodu C_1, a následně i všech vrcholů (jež máme pomocí bodu C_1 vyjádřeny), vypočteme z rovnice, kterou dostaneme dosazením do vztahu $2C_1 = A + B$.

Výpočet: $o : 2x - y - 3 = 0$

$C_1 \in o \;\Rightarrow\; C_1[t, 2t-3]$

$C = 3T - 2C_1 = [-2t, -4t]$

$\overrightarrow{CA_0} = (4+2t, 4t)$

$\overrightarrow{CB_0} = (2t, 2+4t)$

$a : -4t \cdot x + (4+2t) \cdot y + 16t = 0$

$v_a : (4+2t) \cdot x + 4t \cdot y - 16 - 8t = 0$

$b : (2+4t) \cdot x - 2t \cdot y + 4t = 0$

$v_b : 2t \cdot x + (2+4t) \cdot y - 4 - 8t = 0$

$$
\begin{array}{ll}
A \in b \cap v_a : & (2+4t) \cdot x_A - 2t \cdot y_A \qquad\quad + 4t = 0 \mid \cdot 2 \\
& \underline{(4+2t) \cdot x_A + 4t \cdot y_A - 16 - 8t = 0} \\
& \qquad\qquad 8x_A + 10t \cdot x_A - 16 = 0
\end{array}
$$

$$x_A = \frac{8}{4+5t} \;\Rightarrow\; y_A = \frac{10t^2+24t+8}{5t^2+4t}$$

$$\begin{aligned}
B \in a \cap v_b: \quad & -4t \cdot x_B + (4+2t) \cdot y_B \quad + 16t = 0 \\
& \underline{2t \cdot x_B + (2+4t) \cdot y_B - 4 - 8t = 0} \mid \cdot 2 \\
& 8y_B + 10t \cdot y_B - 8 = 0
\end{aligned}$$

$$y_B = \frac{4}{4+5t} \;\Rightarrow\; x_B = \frac{20t^2+18t+4}{5t^2+4t}$$

$$\begin{aligned}
2C_1 &= A + B \\
[2t, 4t-6] &= \left[\frac{20t^2+26t+4}{5t^2+4t}, \frac{10t^2+28t+8}{5t^2+4t}\right]
\end{aligned}$$

Porovnáním prvních souřadnic dostáváme:

$$\begin{aligned}
2t &= \frac{20t^2+26t+4}{5t^2+4t} \\
10t^3 + 8t^2 &= 20t^2 + 26t + 4 \\
5t^3 + 4t^2 &= 10t^2 + 13t + 2 \\
5t^3 - 6t^2 - 13t - 2 &= 0 \\
(t+1)\left(t - \frac{11+\sqrt{161}}{10}\right)\left(t - \frac{11-\sqrt{161}}{10}\right) &= 0
\end{aligned}$$

(Kořen $t = -1$ uhodneme a zbylé dva dopočítáme po snížení stupně rovnice vydělením kořenovým činitelem $t+1$. Porovnáním druhých souřadnic bychom došli ke stejné kubické rovnici.)

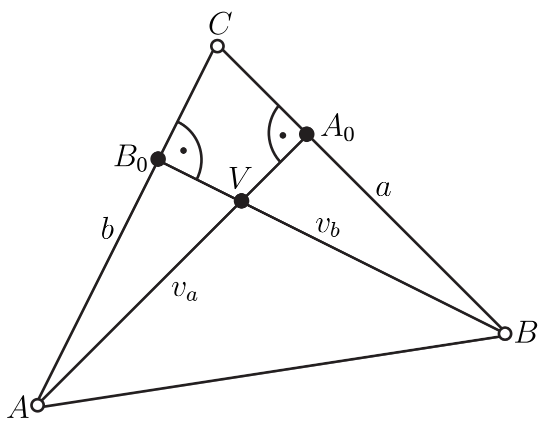
Pro $t = -1$ je $A\,[-8, -6]$, $B\,[6, -4]$, $C\,[2, 4]$,

pro $t = \dfrac{11+\sqrt{161}}{10}$ je $A\left[\dfrac{38-2\sqrt{161}}{25}, \dfrac{59-11\sqrt{161}}{25}\right]$, $B\left[\dfrac{17+7\sqrt{161}}{25}, \dfrac{19-\sqrt{161}}{25}\right]$,
$C\left[\dfrac{-11-\sqrt{161}}{5}, \dfrac{-22-2\sqrt{161}}{5}\right]$,

resp. pro $t = \dfrac{11-\sqrt{161}}{10}$ je $A\left[\dfrac{38+2\sqrt{161}}{25}, \dfrac{59+11\sqrt{161}}{25}\right]$, $B\left[\dfrac{17-7\sqrt{161}}{25}, \dfrac{19+\sqrt{161}}{25}\right]$, $C\left[\dfrac{-11+\sqrt{161}}{5}, \dfrac{-22+2\sqrt{161}}{5}\right]$.

♠ **Výsledek:** $A\,[-8,-6]$, $B\,[6,-4]$ a $C\,[2,4]$, nebo $A\left[\frac{38-2\sqrt{161}}{25}, \frac{59-11\sqrt{161}}{25}\right]$, $B\left[\frac{17+7\sqrt{161}}{25}, \frac{19-\sqrt{161}}{25}\right]$ a $C\left[\frac{-11-\sqrt{161}}{5}, \frac{-22-2\sqrt{161}}{5}\right]$, nebo $A\left[\frac{38+2\sqrt{161}}{25}, \frac{59+11\sqrt{161}}{25}\right]$, $B\left[\frac{17-7\sqrt{161}}{25}, \frac{19+\sqrt{161}}{25}\right]$ a $C\left[\frac{-11+\sqrt{161}}{5}, \frac{-22+2\sqrt{161}}{5}\right]$.

■ **Příklad 34:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte patu $A_0[4,-1]$ výšky AA_0, patu $B_0[-1,-1]$ výšky BB_0 a ortocentrum $V[1,-2]$.



Rozbor: Vrcholy A, B, C určíme po řadě jako průsečíky přímek v_a, b, a, v_b a a, b. Přímka a prochází bodem A_0 kolmo k $\overrightarrow{VA_0}$, přímka b prochází bodem B_0 kolmo k $\overrightarrow{VB_0}$, přímka v_a prochází body V, A_0 a přímka v_b prochází body V, B_0.

Výpočet: $\overrightarrow{VA_0} = (3,1)$

$\overrightarrow{VB_0} = (-2,1)$

$a: 3x + y - 11 = 0$

$b: -2x + y - 1 = 0$

$v_a: X = [1,-2] + t\cdot(3,1),\ t \in \mathbb{R}$

$v_b: X = [1,-2] + s\cdot(-2,1), s \in \mathbb{R}$

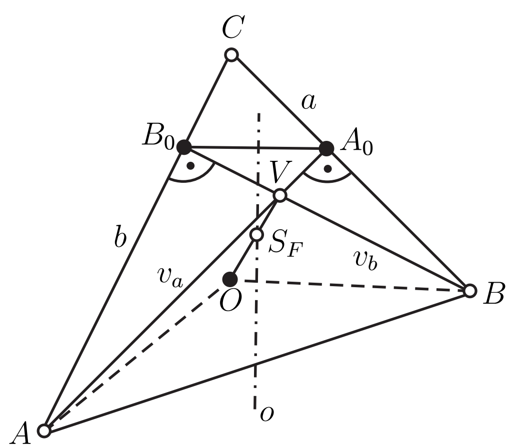
$$\begin{aligned} A \in v_a \cap b: \quad -2(1+3t) + (-2+t) - 1 &= 0 \\ -5t - 5 &= 0 \\ t &= -1 \Rightarrow A[-2,-3] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B \in a \cap v_b: \quad 3(1-2s) + (-2+s) - 11 &= 0 \\
-5t - 10 &= 0 \\
s &= -2 \Rightarrow B[5,-4]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C \in a \cap b: \quad 3x_C + y_C - 11 &= 0 \\
\underline{-2x_C + y_C - \ \ 1 = 0} \\
x_C = 2 &\Rightarrow y_C = 5
\end{aligned}
$$

♠ **Výsledek:** $A[-2,-3]$, $B[5,-4]$, $C[2,5]$.

■ **Příklad 35**:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte patu $A_0[6,2]$ výšky AA_0, patu $B_0[1,2]$ výšky BB_0 a střed $O[3,3]$ kružnice opsané.



Rozbor: Feuerbachova kružnice prochází body A_0, B_0, její střed S_F tedy leží na ose o úsečky A_0B_0 a můžeme jej vyjádřit parametrem t jako její obecný bod. Střed S_F Feuerbachovy kružnice je také středem úsečky VO, a platí tedy $V = 2S_F - O$. Vrcholy A, B, C leží po řadě v průsečíku přímek b, v_a, a, v_b a a, b. Přímka a prochází bodem B_0 kolmo k $\overrightarrow{VB_0}$, přímka b prochází bodem A_0 kolmo k $\overrightarrow{VA_0}$, přímka v_a prochází body A_0, V a přímka v_b prochází body A_0, V. K výpočtu neznámého parametru t (pro střed S_F) využijeme rovnost $|AO| = |BO|$ a pak dosadíme do souřadnic vrcholů.

Výpočet: $o_{A_0B_0}: x - \frac{7}{2} = 0$

$S_F \in o_{A_0B_0} \Rightarrow S_F\left[\frac{7}{2}, t\right]$

$V = 2S_F - O = 2\cdot\left[\frac{7}{2}, t\right] - [3,3] = [4, 2t-3]$

$\overrightarrow{VA_0} = (2, 5-2t)$

$\overrightarrow{VB_0} = (-3, 5-2t)$

$a : 2x + (5-2t)y + 4t - 22 = 0$

$b : 3x + (2t-5)y + 7 - 4t = 0$

$v_a : (2t-5)x + 2y + 26 - 12t = 0$

$v_b : (5-2t)x + 3y + 2t - 11 = 0$

$$A \in v_a \cap b: \quad \begin{aligned} (2t-5)x_A + 2y_A + 26 - 12t &= 0 \\ \underline{3x_A + (2t-5)y_A + 7 - 4t} &\underline{= 0} \\ (-4t^2+20t-19)x_A + 24t^2 - 120t + 144 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_A = \frac{24t^2-120t+144}{4t^2-20t+19} \Rightarrow y_A = \frac{8t^2-70t+113}{4t^2-20t+19}$$

$$B \in a \cap v_b: \quad \begin{aligned} 2x_B + (5-2t)y_B + 4t - 22 &= 0 \\ \underline{(5-2t)x_B + 3y_B + 2t - 11} &\underline{= 0} \\ (-4t^2+20t-19)x_B + 4t^2 - 20t - 11 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_B = \frac{4t^2-20t-11}{4t^2-20t+19} \Rightarrow y_B = \frac{8t^2-60t+88}{4t^2-20t+19}$$

$$C \in a \cap b: \quad \begin{aligned} 2x_C + (5-2t)y_C + 4t - 22 &= 0 \\ \underline{3x_C + (2t-5)y_C + 7 - 4t} &\underline{= 0} \\ 5x_C - 15 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_C = 3 \Rightarrow y_C = \frac{16-4t}{5-2t}$$

$$|AO| = |BO|$$

$$\sqrt{\left(\frac{-12t^2+60t-87}{4t^2-20t+19}\right)^2 + \left(\frac{4t^2+10t-56}{4t^2-20t+19}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8t^2-40t+68}{4t^2-20t+19}\right)^2 + \left(\frac{4t^2-31}{4t^2-20t+19}\right)^2}$$

$$\left(\frac{-12t^2+60t-87}{4t^2-20t+19}\right)^2 + \left(\frac{4t^2+10t-56}{4t^2-20t+19}\right)^2 = \left(\frac{8t^2-40t+68}{4t^2-20t+19}\right)^2 + \left(\frac{4t^2-31}{4t^2-20t+19}\right)^2$$

$$160t^4 - 1360t^3 + 5340t^2 - 11560t + 10705 = 80t^4 - 640t^3 + 2440t^2 - 5440t + 5585$$

$$80t^4 - 720t^3 + 2900t^2 - 6120t + 5120 = 0$$

$$4t^4 - 36t^3 + 145t^2 - 306t + 256 = 0$$

Podle známého pravidla zjistíme racionální kořen $t_1 = 2$, zbylá kubická rovnice má jediný reálný kořen $t_2 = \frac{1}{6}\left(14 + \sqrt[3]{18\sqrt{2190}+593} - \sqrt[3]{18\sqrt{2190}-593}\right)$, zbylé dva kořeny jsou komplexně sdružené.

Pro $t = 2$ je $A[0,-1]$, $B[7,0]$, $C[3,8]$,

pro $t = \frac{1}{6}\left(14 + \sqrt[3]{18\sqrt{2190}+593} - \sqrt[3]{18\sqrt{2190}-593}\right)$ je

$x_A = \frac{300+12\sqrt[3]{18\sqrt{2190}+593}-12\sqrt[3]{18\sqrt{2190}-593}-6\sqrt[3]{1061201+21348\sqrt{2190}}-6\sqrt[3]{1061201-21348\sqrt{2190}}}{195-58\sqrt[3]{18\sqrt{2190}+593}+58\sqrt[3]{18\sqrt{2190}-593}-\sqrt[3]{1061201+21348\sqrt{2190}}-\sqrt[3]{1061201-21348\sqrt{2190}}}$,

$y_A = \frac{345+49\sqrt[3]{18\sqrt{2190}+593}-49\sqrt[3]{18\sqrt{2190}-593}-2\sqrt[3]{1061201+21348\sqrt{2190}}-2\sqrt[3]{1061201-21348\sqrt{2190}}}{195-58\sqrt[3]{18\sqrt{2190}+593}+58\sqrt[3]{18\sqrt{2190}-593}-\sqrt[3]{1061201+21348\sqrt{2190}}-\sqrt[3]{1061201-21348\sqrt{2190}}}$,

$x_B = \frac{465-58\sqrt[3]{18\sqrt{2190}+593}+58\sqrt[3]{18\sqrt{2190}-593}-\sqrt[3]{1061201+21348\sqrt{2190}}-\sqrt[3]{1061201-21348\sqrt{2190}}}{195-58\sqrt[3]{18\sqrt{2190}+593}+58\sqrt[3]{18\sqrt{2190}-593}-\sqrt[3]{1061201+21348\sqrt{2190}}-\sqrt[3]{1061201-21348\sqrt{2190}}}$,

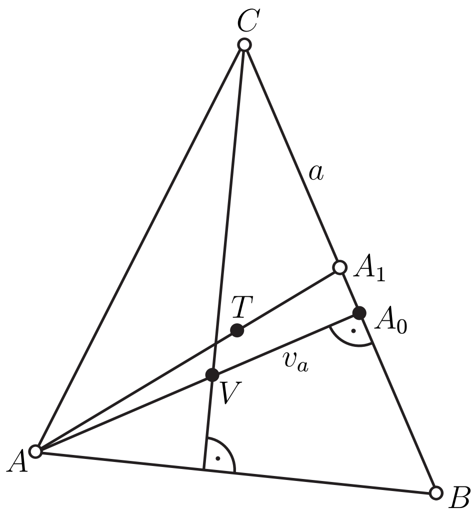
$y_B = \frac{360+34\sqrt[3]{18\sqrt{2190}+593}-34\sqrt[3]{18\sqrt{2190}-593}-2\sqrt[3]{1061201+21348\sqrt{2190}}-2\sqrt[3]{1061201-21348\sqrt{2190}}}{195-58\sqrt[3]{18\sqrt{2190}+593}+58\sqrt[3]{18\sqrt{2190}-593}-\sqrt[3]{1061201+21348\sqrt{2190}}-\sqrt[3]{1061201-21348\sqrt{2190}}}$,

$C\left[3, \frac{20-2\sqrt[3]{18\sqrt{2190}+593}+2\sqrt[3]{18\sqrt{2190}-593}}{1-\sqrt[3]{18\sqrt{2190}+593}+\sqrt[3]{18\sqrt{2190}-593}}\right]$.

Tyto výrazy jsou (s výjimkou souřadnice $x_C = 3$) natolik složité, že ve výsledku uvedeme jejich zaokrouhlené hodnoty.

♠ **Výsledek:** $A[0,-1]$, $B[7,0]$ a $C[3,8]$, nebo (přibližně) $A[2,46;-0,98]$, $B[-0,03;-0,75]$ a $C[3;-2,52]$.

■ **Příklad 36*:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte patu $A_0[7,9]$ výšky AA_0, těžiště $T\left[5,\frac{17}{3}\right]$ a ortocentrum $V[6,8]$.



Rozbor: Nejprve určíme rovnici přímky a, jež prochází bodem A_0 kolmo k $\overrightarrow{A_0V}$. Vrchol A leží na přímce v_a, která prochází body A_0, V, platí tedy $A = A_0 + t\cdot\overrightarrow{A_0V}$. Bod A_1 vyjádříme rovností $A_1 = T + \frac{1}{2}\overrightarrow{AT}$, neznámý parametr t z vyjádření souřadnic vrcholu A a bodu A_1 určíme ze vztahu $A_1 \in a$. Bod A_1 je střed úsečky BC, platí tedy $B = A_1 + s\cdot\overrightarrow{A_1A_0}$, $C = A_1 - s\cdot\overrightarrow{A_1A_0}$, pro vhodné $s\in\mathbb{R}$, jež dopočítáme ze vztahu $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CV} = 0$.

Výpočet: $\overrightarrow{A_0V} = (-1,-1) \overset{A_0\in a}{\Rightarrow} a: x+y-16=0$

$A = A_0 + t\cdot\overrightarrow{A_0V} = [7-t, 9-t]$

$A_1 = T + \frac{1}{2}\overrightarrow{AT} = \left[5,\frac{17}{3}\right] + \frac{1}{2}\left(-2+t, -\frac{10}{3}+t\right) = \left[4+\frac{t}{2}, 4+\frac{t}{2}\right]$

$$A_1\in a:\ \left(4+\frac{t}{2}\right)+\left(4+\frac{t}{2}\right)-16=0$$

$$t-8=0$$

$$t=8 \Rightarrow A_1[8,8],\ A[-1,1]$$

$\overrightarrow{A_1A_0} = (-1,1)$

$B = A_1 + s\cdot\overrightarrow{A_1A_0} = [8-s, 8+s]$

$C = A_1 - s\cdot\overrightarrow{A_1A_0} = [8+s, 8-s]$

$\overrightarrow{AB} = (9-s, 7+s)$

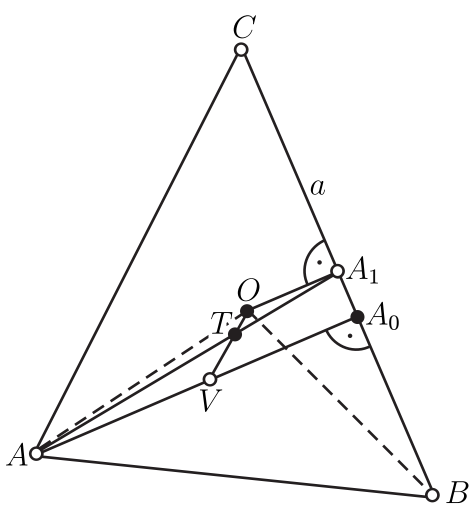
$\overrightarrow{CV} = (-2-s, s)$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CV}=0$$
$$(9-s,7+s)\cdot(-2-s,s)=0$$
$$-18-7s+s^2+7s+s^2=0$$
$$s^2=9$$
$$s=\pm 3$$

Pro $s=3$ je $B[5,11]$, $C[11,5]$, pro $s=-3$ je $B[11,5]$, $C[5,11]$.

♠ **Výsledek:** $A[-1,1]$, $B[5,11]$ a $C[11,5]$, nebo $A[-1,1]$, $B[11,5]$ a $C[5,11]$.

■ **Příklad 37*:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte patu $A_0[-8,9]$ výšky AA_0, těžiště $T[2,5]$ a střed $O[7,-3]$ kružnice opsané.



Rozbor: Pro body V,T,O na Eulerově přímce platí vztah $\overrightarrow{VT}=2\overrightarrow{TO}$, jehož úpravou dostáváme $V=3T-2O$. Bod A_1 je patou kolmice spuštěné z bodu O na přímku a, jež prochází bodem A_0 kolmo k $\overrightarrow{VA_0}$, takže známe některý její směrový vektor $\vec{u}\perp\overrightarrow{VA_0}$. Z vlastností těžnic plyne $A=A_1+3\cdot\overrightarrow{A_1T}=3T-2A_1$ a platí také vztahy $B=A_1+s\cdot\vec{u}$, $C=A_1-s\cdot\vec{u}$, neboť A_1 je střed úsečky BC ležící na přímce a. K výpočtu neznámého parametru s z vyjádření souřadnic vrcholů B,C užijeme rovnost $|OA|=|OB|$.

Výpočet: $V = 3T - 2O = [-8, 21]$

$\overrightarrow{VA_0} = (0, -12) \Rightarrow \vec{u} = (1, 0)$

$a : y - 9 = 0$

$A_1 \in a \Rightarrow A_1[t, 9]$

$\overrightarrow{OA_1} = (t - 7, 12)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_1} \cdot \vec{u} &= 0 \\ (t - 7, 12) \cdot (1, 0) &= 0 \\ t - 7 &= 0 \\ t &= 7 \Rightarrow A_1[7, 9] \end{aligned}$$

$A = 3T - 2A_1 = [-8, -3]$

$B = A_1 + s \cdot \vec{u} = [7 + s, 9]$

$C = A_1 - s \cdot \vec{u} = [7 - s, 9]$

$|OA| = \sqrt{(-8 - 7)^2 + (-3 + 3)^2} = 15$

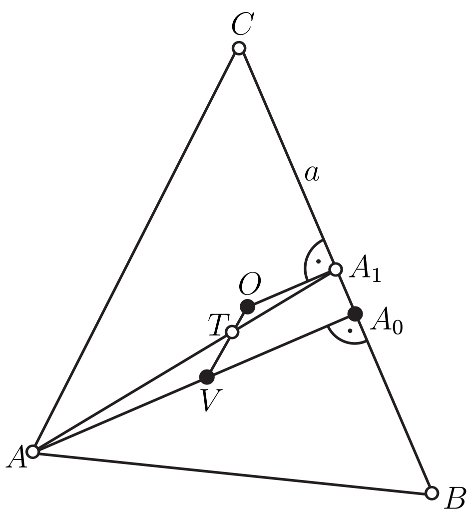
$|OB| = \sqrt{(7 + s - 7)^2 + (9 + 3)^2} = \sqrt{s^2 + 144}$

$$\begin{aligned} |OA| &= |OB| \\ 15 &= \sqrt{s^2 + 144} \\ 225 &= s^2 + 144 \\ s^2 &= 81 \\ s &= \pm 9 \end{aligned}$$

Pro $s = 9$ je $B[16, 9]$, $C[-2, 9]$, pro $s = -9$ je $B[-2, 9]$, $C[16, 9]$.

♠ **Výsledek:** $A[-8, -3]$, $B[16, 9]$ a $C[-2, 9]$, nebo $A[-8, -3]$, $B[-2, 9]$ a $C[16, 9]$.

■ **Příklad 38*:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte patu $A_0[8,2]$ výšky AA_0, ortocentrum $V[4,-2]$ a střed $O[2,6]$ kružnice opsané.



Rozbor: Nejdříve určíme střed A_1 úsečky BC, která leží na přímce a procházející bodem A_0 kolmo k $\overrightarrow{VA_0}$. Z vlastnosti těžnic a podobnosti trojúhelníků AVT, A_1OT plyne vztah $\overrightarrow{VA} = 2 \cdot \overrightarrow{A_1O}$,jehož úpravou dostáváme rovnost $A = V + 2 \cdot \overrightarrow{A_1O}$. Dále platí $B = A_1 + t \cdot \overrightarrow{A_1A_0}$, $C = A_1 - t \cdot \overrightarrow{A_1A_0}$ pro vhodné $t \in \mathbb{R}$, jež dopočítáme ze vztahu $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{VC} = 0$.

Výpočet: $\overrightarrow{VA_0} = (4,4)$

$a : x + y - 10 = 0\,; \quad A_1 \in a \Rightarrow A_1[s, 10-s]$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_1O} \cdot \vec{u} &= 0 \\
(2-s, s-4) \cdot (1,-1) &= 0 \\
2 - s - s + 4 &= 0 \\
-2s + 6 &= 0 \\
s &= 3 \;\Rightarrow\; A_1[3,7]
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{A_1O} = (-1,-1)$

$\overrightarrow{A_1A_0} = (5,-5)$

$A = V + 2 \cdot \overrightarrow{A_1O} = [2,-4]$

$B = A_1 + t \cdot \overrightarrow{A_1A_0} = [3+5t, 7-5t]$

$C = A_1 - t \cdot \overrightarrow{A_1A_0} = [3-5t, 7+5t]$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{VC} &= 0 \\
(1+5t, 11-5t) \cdot (-1-5t, 9+5t) &= 0 \\
-1 - 10t - 25t^2 + 99 + 10t - 25t^2 &= 0 \\
50t^2 &= 98 \\
t^2 &= \frac{49}{25} \\
t &= \pm \frac{7}{5}
\end{aligned}
$$

Pro $t = \frac{7}{5}$ je $B[10, 0]$, $C[-4, 14]$, pro $t = -\frac{7}{5}$ je $B[-4, 14]$, $C[10, 0]$.

♠ **Výsledek:** $A[2, -4]$, $B[10, 0]$ a $C[-4, 14]$, nebo $A[2, -4]$, $B[-4, 14]$ a $C[10, 0]$.

Kapitola 3

Nekorektní úlohy

V této kapitole přehledně uvádíme všechny nekorektní úlohy včetně závislostí, které je činí nekorektními. Pořadí úloh a výběr reprezentantů pro jejich zadání jsou provedeny podle stejných zásad, jako v seznamu korektních úloh v podlapitole 1.2 na str. 11.

1. A, B, C_1 $\quad \left(C_1 = \frac{1}{2}(A+B)\right)$
2. A, B, A_0 $\quad \left(\overrightarrow{AA_0} \cdot \overrightarrow{BA_0} = 0\right)$
3. A, B, C_0 $\quad (A, B, C_0$ jsou kolineární$)$
4. A, B, O $\quad (|AO| = |BO|)$
5. A, A_1, A_0 $\quad \left(\overrightarrow{AA_0} \cdot \overrightarrow{A_1A_0} = 0\right)$
6. A, B_1, A_0 $\quad (|AB_1| = |B_1A_0|)$[1]
7. A, B_1, B_0 $\quad (A, B_1, B_0$ jsou kolineární$)$
8. A, B_1, C_0 $\quad (|AB_1| = |B_1C_0|)$[2]
9. A, A_1, T $\quad \left(\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}\right)$

[1]Body A, A_0 leží na Thaletově kružnici se středem v B_1 nad průměrem AC.
[2]Body A, C_0 leží na Thaletově kružnici se středem v B_1 nad průměrem AC.

10. A, B_1, O $\left(\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{OB_1} = 0\right)$

11. A, A_0, T $\left(\overrightarrow{AA_0} \cdot \overrightarrow{A_1A_0} = 0;\text{ kde } A_1 = A + \frac{3}{2}\overrightarrow{AT}\right)$

12. A, A_0, V (A, A_0, V jsou kolineární)

13. A, B_0, V $\left(\overrightarrow{AB_0} \cdot \overrightarrow{B_0V} = 0\right)$

14. A_1, B_0, C_0 $(|A_1B_0| = |A_1C_0|)$[3]

15. A_1, A_0, T $\left(\overrightarrow{AA_0} \cdot \overrightarrow{A_1A_0} = 0;\text{ kde } A = A_1 + 3\overrightarrow{A_1T}\right)$

16. A_1, A_0, V $\left(\overrightarrow{A_1A_0} \cdot \overrightarrow{A_0V} = 0\right)$

17. A_1, A_0, O $\left(\overrightarrow{A_1A_0} \cdot \overrightarrow{A_1O} = 0\right)$

18. T, V, O $\left(\overrightarrow{VT} = 2\overrightarrow{TO}\right)$

[3] Body B_0, C_0 leží na Thaletově kružnici se středem v A_1 nad průměrem BC.

Kapitola 4

Přehled všech trojic význačných bodů

V této kapitole uvádíme přehled všech možných trojic význačných bodů trojúhelníku ABC (jak jsme je vymezili na str. 9), rozdělených do 57 tříd ekvivalence popsané na str. 10. U každé třídy (s výjimkou té s číslem 1, jež nepředstavuje žádnou úlohu) doplňujeme údaj, zda takové zadání je korektní úloha (tj. řešitelná) a pod kterým pořadovým číslem je v kapitole 2 vyřešena.[1] U nekorektních úloh uvádíme vedle informace o nekorektnosti (N) též pořadové číslo ze seznamu z kapitoly 3, v němž lze nalézt druh závislosti v zadání.

1. A, B, C
2. $A, B, A_1 \sim A, B, B_1 \sim A, C, A_1 \sim A, C, C_1 \sim B, C, B_1 \sim B, C, C_1$ (K1)
3. $A, B, C_1 \sim A, C, B_1 \sim B, C, A_1$ (N1)
4. $A, B, A_0 \sim A, B, B_0 \sim A, C, A_0 \sim A, C, C_0 \sim B, C, B_0 \sim B, C, C_0$ (N2)
5. $A, B, C_0 \sim A, C, B_0 \sim B, C, A_0$ (N3)
6. $A, B, T \sim A, C, T \sim B, C, T$ (K2)

[1] Např. (K8) znamená, že se jedná o třídu korektních (tj. řešitelných) úloh, jejichž zástupce uvedený na 1. místě (A, A_1, V) je úloha řešená v kapitole 2 jako „Příklad 8“.

7. $A, B, V \sim A, C, V \sim B, C, V$ (K3)

8. $A, B, O \sim A, C, O \sim B, C, O$ (N4)

9. $A, A_1, B_1 \sim A, A_1, C_1 \sim B, A_1, B_1 \sim B, B_1, C_1 \sim C, A_1, C_1 \sim C, B_1, C_1$ (K4)

10. $A, B_1, C_1 \sim B, A_1, C_1 \sim C, A_1, B_1$ (K5)

11. $A, A_1, A_0 \sim B, B_1, B_0 \sim C, C_1, C_0$ (N5)

12. $A, A_1, B_0 \sim A, A_1, C_0 \sim B, B_1, A_0 \sim B, B_1, C_0 \sim C, C_1, A_0 \sim C, C_1, B_0$ (K6)

13. $A, B_1, A_0 \sim A, C_1, A_0 \sim B, A_1, B_0 \sim B, C_1, B_0 \sim C, A_1, C_0 \sim C, B_1, C_0$ (N6)

14. $A, B_1, B_0 \sim A, C_1, C_0 \sim B, A_1, A_0 \sim B, C_1, C_0 \sim C, A_1, A_0 \sim C, B_1, B_0$ (N7)

15. $A, B_1, C_0 \sim A, C_1, B_0 \sim B, A_1, C_0 \sim B, C_1, A_0 \sim C, A_1, B_0 \sim C, B_1, A_0$ (N8)

16. $A, A_1, T \sim B, B_1, T \sim C, C_1, T$ (N9)

17. $A, B_1, T \sim A, C_1, T \sim B, A_1, T \sim B, C_1, T \sim C, A_1, T \sim C, B_1, T$ (K7)

18. $A, A_1, V \sim B, B_1, V \sim C, C_1, V$ (K8)

19. $A, B_1, V \sim A, C_1, V \sim B, A_1, V \sim B, C_1, V \sim C, A_1, V \sim C, B_1, V$ (K9)

20. $A, A_1, O \sim B, B_1, O \sim C, C_1, O$ (K10)

21. $A, B_1, O \sim A, C_1, O \sim B, A_1, O \sim B, C_1, O \sim C, A_1, O \sim C, B_1, O$ (N10)

22. $A, A_0, B_0 \sim A, A_0, C_0 \sim B, A_0, B_0 \sim B, B_0, C_0 \sim C, A_0, C_0 \sim C, B_0, C_0$ (K11)

23. $A, B_0, C_0 \sim B, A_0, C_0 \sim C, A_0, B_0$ (K12)

24. $A, A_0, T \sim B, B_0, T \sim C, C_0, T$ (N11)

25. $A, B_0, T \sim A, C_0, T \sim B, A_0, T \sim B, C_0, T \sim C, A_0, T \sim C, B_0, T$ (K13)

26. $A, A_0, V \sim B, B_0, V \sim C, C_0, V$ (N12)

27. $A, B_0, V \sim A, C_0, V \sim B, A_0, V \sim B, C_0, V \sim C, A_0, V \sim C, B_0, V$ (N13)

28. $A, A_0, O \sim B, B_0, O \sim C, C_0, O$ (K14)

29. $A, B_0, O \sim A, C_0, O \sim B, A_0, O \sim B, C_0, O \sim C, A_0, O \sim C, B_0, O$ (K15)

30. $A, T, V \sim B, T, V \sim C, T, V$ (K16)

31. $A, T, O \sim B, T, O \sim C, T, O$ (K17)

32. $A, V, O \sim B, V, O \sim C, V, O$ (K18)

33. A_1, B_1, C_1 (K19)

34. $A_1, B_1, A_0 \sim A_1, B_1, B_0 \sim A_1, C_1, A_0 \sim A_1, C_1, C_0 \sim B_1, C_1, B_0 \sim B_1, C_1, C_0$ (K20)

35. $A_1, B_1, C_0 \sim A_1, C_1, B_0 \sim B_1, C_1, A_0$ (K21)

36. $A_1, B_1, T \sim A_1, C_1, T \sim B_1, C_1, T$ (K22)

37. $A_1, B_1, V \sim A_1, C_1, V \sim B_1, C_1, V$ (K23)

38. $A_1, B_1, O \sim A_1, C_1, O \sim B_1, C_1, O$ (K24)

39. $A_1, A_0, B_0 \sim A_1, A_0, C_0 \sim B_1, A_0, B_0 \sim B_1, B_0, C_0 \sim C_1, A_0, C_0 \sim C_1, B_0, C_0$ (K25)

40. $A_1, B_0, C_0 \sim B_1, A_0, C_0 \sim C_1, A_0, B_0$ (N14)

41. $A_1, A_0, T \sim B_1, B_0, T \sim C_1, C_0, T$ (N15)

42. $A_1, B_0, T \sim A_1, C_0, T \sim B_1, A_0, T \sim B_1, C_0, T \sim C_1, A_0, T \sim C_1, B_0, T$ (K26)

43. $A_1, A_0, V \sim B_1, B_0, V \sim C_1, C_0, V$ (N16)

44. $A_1, B_0, V \sim A_1, C_0, V \sim B_1, A_0, V \sim B_1, C_0, V \sim C_1, A_0, V \sim C_1, B_0, V$ (K27)

45. $A_1, A_0, O \sim B_1, B_0, O \sim C_1, C_0, O$ (N17)

46. $A_1, B_0, O \sim A_1, C_0, O \sim B_1, A_0, O \sim B_1, C_0, O \sim C_1, A_0, O \sim C_1, B_0, O$ (K28)

47. $A_1, T, V \sim B_1, T, V \sim C_1, T, V$ (K29)

48. $A_1, T, O \sim B_1, T, O \sim C_1, T, O$ (K30)

49. $A_1, V, O \sim B_1, V, O \sim C_1, V, O$ (K31)

50. A_0, B_0, C_0 (K32)

51. $A_0, B_0, T \sim A_0, C_0, T \sim B_0, C_0, T$ (K33)

52. $A_0, B_0, V \sim A_0, C_0, V \sim B_0, C_0, V$ (K34)

53. $A_0, B_0, O \sim A_0, C_0, O \sim B_0, C_0, O$ (K35)

54. $A_0, T, V \sim B_0, T, V \sim C_0, T, V$ (K36)

55. $A_0, T, O \sim B_0, T, O \sim C_0, T, O$ (K37)

56. $A_0, V, O \sim B_0, V, O \sim C_0, V, O$ (K38)

57. T, V, O (N18)

Závěr

Předložená práce vznikla v rámci mého doktorského studia oboru Obecné otázky matematiky a jsou v ní shrnuty mé dílčí dosažené výsledky. Předpokládám, že v budoucí Ph.D. práci podobným způsobem prozkoumám další skupiny příkladů na analytické výpočty trojúhelníků, v jejichž zadáních budou kromě význačných bodů vystupovat i význačné přímky a vektory spojené s trojúhelníkem.

Věřím, že sestavené příklady a způsob podání jejich řešení by se mohly stát dobrou pomůckou pro učitele i žáky středních škol v hodinách analytické geometrie.

Literatura

[1] Bušek, I.: *Sbírka úloh pro gymnázia - Analytická geometrie.* Prometheus, Praha 1996.

[2] Bušek, I., Mannová, B., Šedivý, J., Riečan, B.: *Sbírka úloh z matematiky pro třetí ročník gymnázií.* SPN, Praha 1989.

[3] Kočandrle, M., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia - analytická geometrie.* Prometheus, Praha 2002.

[4] Kubát, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Prometheus, Praha 2004.

[5] Pecl, J.: *Analytické výpočty trojúhelníku. Diplomová práce.* MU v Brně, Brno 2005.

[6] Petáková, J.: *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Prometheus, Praha 1998.

[7] Šedivý, J. a kol.: *Matematika pro III. ročník gymnázií.* SPN, Praha 1986.

[8] Švrček, J., Vanžura, J.: *Geometrie trojúhelníka.* SNTL, Praha 1988.

[9] Vejsada, F., Talafous, F.: *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia: pomocná kniha pro střední všeobecně vzdělávací školy.* SPN, Praha 1968.