MB102 - Matematika II (7. cvičení) 3.4.2008

Taylorův vzorec

- nechť funkce f má v okolí bodu x_0 derivace až do řádu $n+1$, pak $\forall x$ z okolí x_0 platí:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

Taylorův polynom + zbytek = Taylorova řada

- Taylorův polynom ... T^n

Př: Napište Taylorův polynom

$T^2, x_0 = -1 \quad \dots \quad T^2_{-1} \qquad f(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$

$f(x_0) = 1 + 3 + 5 + 2 = \underline{5}$; $f'(x) = 3 + 10x - 6x^2$;

$f'(x_0) = 3 - 10 - 6 = \underline{-13}$; $f''(x) = 10 - 12x$; $f''(x_0) = 10 + 12 = \underline{22}$

$$T^2_{-1} = 5 + \frac{-13}{1}(x+1) + \frac{22}{2}(x+1)^2 = \underline{\underline{5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2}}$$

$T^4, x_0 = 0 \quad \dots$ Maclaurinův polynom $\dots \ T^4_0$; $f(x) = \sin 2x$

$f(x_0) = \sin 0 = \underline{0}$; $f'(x) = \cos(2x)\cdot 2$; $f'(x_0) = 2\cdot\cos 0 = \underline{2}$;

$f''(x) = -4\sin 2x$; $f''(x_0) = \underline{0}$; $f'''(x) = -8\cos 2x$;

$f'''(x_0) = \underline{-8}$; $f^{IV}(x) = 16\sin 2x$; $f^{IV}(x_0) = \underline{0}$

$$T^4_0 = \underline{\underline{2x - \frac{4}{3}x^3}}$$

(PF) Vyjádřete fci e^x jako nekonečnou mocninnou řadu

$$f(x) = e^x \dots f(x_0) = 1 \; ; \; f'(x) = e^x \dots f'(x_0) = 1 \; ; \; \dots$$

$$T = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^3 + \dots = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}}$$

... spočtěte poloměr konvergence

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}(n+1)}{1}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}(n+1) = \underline{\infty} \quad \dots \quad \underline{D(f) = \mathbb{R}}$$

(PF) Vyjádřete fci $\sin x$ jako nekonečnou mocninnou řadu

$$f(x) = \sin x \dots f(x_0) = 0 \; ; \; f'(x) = \cos x \dots f'(x_0) = 1 \; ;$$
$$f''(x) = -\sin x \dots f''(x_0) = 0 \; ; \; f'''(x) = -\cos x \dots f'''(x_0) = -1 \; ;$$
$$f^{IV}(x) = \sin x \dots f^{IV}(x_0) = 0 \; ; \; \dots$$

$$T = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \dots =$$

$$\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}}$$

... spočtěte poloměr konvergence

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^n(-1)}{(2n+3)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{(-1)^n}}{\cancel{(2n+1)!}}\cdot\frac{(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)!}}{\cancel{(-1)^n}(-1)}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)(2n+2)}{-1}\right| = \underline{\infty} \ \dots \ \underline{D(f)=\mathbb{R}}$$

Př Daný polynom vyjádřete jako polynom dvojčlenu $(x-1)$

$3x^2 - x + 2$

$\underline{x_0 = 1}$

$f(x) = 3x^2 - x + 2 \ \dots \ f(x_0) = 3 - 1 + 2 = \underline{4}$

$f'(x) = 6x - 1 \ \dots \ f'(x_0) = 6 - 1 = \underline{5}$

$f''(x) = 6 \ \dots \ f''(x_0) = \underline{6}$

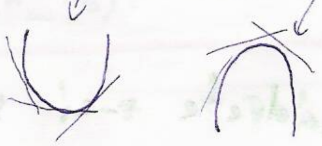
$$3x^2 - x + 2 = \underline{\underline{4 + 5(x-1) + 3(x-1)^2}}$$

Zk.: $4 + 5x - 5 + 3x^2 - 6x + 3 = \underline{3x^2 - x + 2}$

Průběh funkce

1) definiční obor, sudost x lichost, periodická
2) kladná, záporná, $P(x)$, $P(y)$
3) monotónost funkce, (lokální extrémy)
4) konvexnost, konkávnost, (inflexní body)
5) asymptoty (bez směrnice, se směrnicí)

konvexní   konkávní



=> **sudá funkce**: symetrická podle osy y ... $f(x) = f(-x)$
lichá funkce: symetrická podle počátku ... $f(-x) = -f(x)$

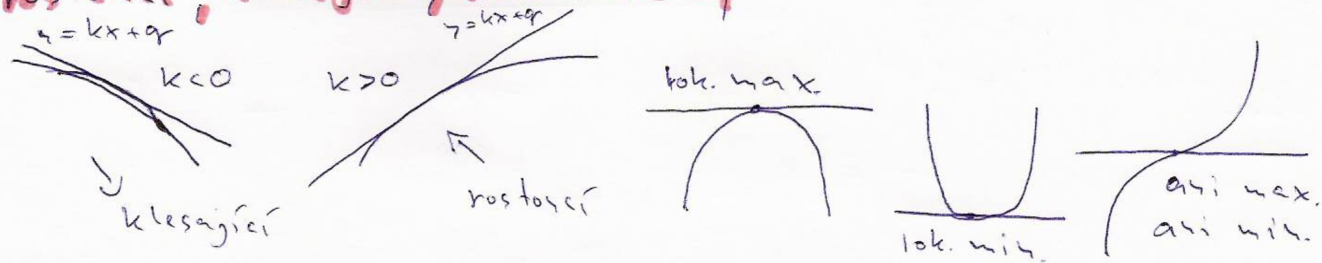
Př určete sudost, lichost

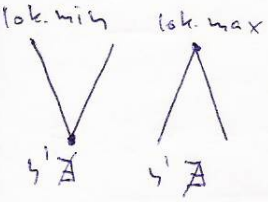
$y = \sin x \quad \sin(-x) = -\sin x \ \dots \ \underline{\text{lichá}}$

$y = x^4 + 3x^2 \quad (-x)^4 + 3(-x)^2 = x^4 + 3x^2 \ \dots \ \underline{\text{sudá}}$

$y = \mathrm{tg}\, x + x^2 \quad \mathrm{tg}(-x) + (-x)^2 = -\mathrm{tg}\, x + x^2 \ \dots \ \underline{\text{ani S, ani L.}}$

$\Rightarrow$ **rostoucí, klesající, lok. extrémy**





$\Rightarrow$ F-ce ... klesá : $y' < 0$

roste : $y' > 0$

má lok. extrém $\rightarrow y' = 0$ ⊕ změna znaménka y'

$\rightarrow y' = \nexists$

Př Určete, kde daná f-ce roste a kde klesá

$y = \frac{x}{2} - \operatorname{arctg} x$ ... $D(f) = \mathbb{R}$

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{2(1+x^2)} = \frac{x^2-1}{2(x^2+1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{\underbrace{2(x^2+1)}_{\text{vždy kladné}}}$$

$+ \quad -1 \quad - \quad 1 \quad +$

roste ... $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

klesá ... $\langle -1; 1 \rangle$

$y = xe^{\frac{1}{x}}$ ... $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$y' = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{-x^2} = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\text{vždy kladné}} \cdot \frac{x-1}{x}$$

$-\ \ -\ \ +$

$-\ \ +\ \ +$

$\oplus \quad 0 \quad \ominus \quad 1 \quad \oplus$

rostoucí ... $(-\infty; 0)$, $(1; \infty)$

klesající ... $(0; 1\rangle$

$y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ ... $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2} = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{x^2}{(x+1)^2}\right)\right](x+1)^2} =$$

$$\frac{1}{(x+1)^2 + x^2}$$ ... roste pro $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$