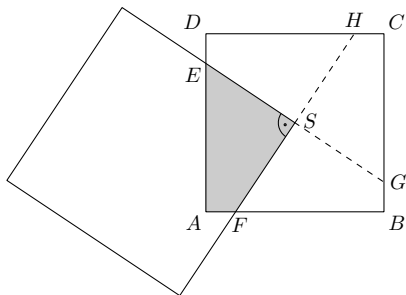


Návodné úlohy, nápady apod.

... dnes podle geometrických úloh MO¹



12. prosince 2019²

Vojtěch Žádník³

¹<http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly>

²<http://is.muni.cz/www/zadnik/mo/dilna19/>

³zadnik@mail.muni.cz

... řešitele:

- ▶ Jak začít? (porozumění textu)
- ▶ Jak postupovat? (vlastní řešení)
- ▶ Jak zapsat? (argumentace)

... učitele:

- ▶ Jak navést? (a neprozradit příliš)
- ▶ Jak usměrnit? (nápady, zápisy)
- ▶ Jak dál? (souvislosti)

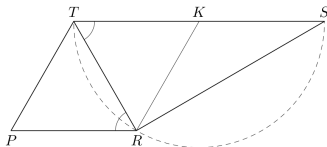
Ukázky	2
Postřehy	11
Nápady	15
Poznámky	25
Cvičení	32

Zadání Renata si sestrojila lichoběžník $PRST$ se základnami PR a ST , ve kterém současně platí:

- ▶ lichoběžník $PRST$ není pravoúhlý;
- ▶ trojúhelník TRP je rovnostranný;
- ▶ trojúhelník TRS je pravoúhlý;
- ▶ jeden z trojúhelníků TRS , TRP má obsah 10 cm^2 .

Uřčete obsah druhého z těchto dvou trojúhelníků. Najděte všechny možnosti.

Nápad

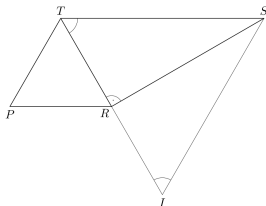


Zadání Renata si sestrojila lichoběžník $PRST$ se základnami PR a ST , ve kterém současně platí:

- ▶ lichoběžník $PRST$ není pravoúhlý;
- ▶ trojúhelník TRP je rovnostranný;
- ▶ trojúhelník TRS je pravoúhlý;
- ▶ jeden z trojúhelníků TRS , TRP má obsah 10 cm^2 .

Určete obsah druhého z těchto dvou trojúhelníků. Najděte všechny možnosti.

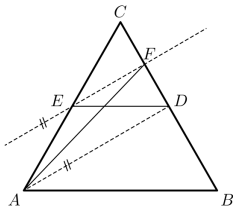
Jiný nápad



Zadání V rovnostranném trojúhelníku ABC se stranou délky 8 cm je bod D střed strany BC a bod E je střed strany AC . Bod F leží na úsečce BC tak, že obsah trojúhelníku ABF je stejný jako obsah čtyřúhelníku $ABDE$.

Vypočtěte délku úsečky BF .

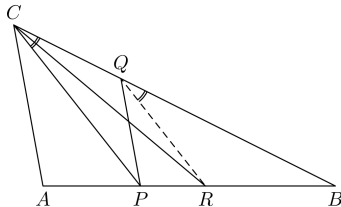
Nápad



Zadání V trojúhelníku ABC leží bod P ve třetině úsečky AB blíže bodu A , bod R je ve třetině úsečky PB blíže bodu P a bod Q leží na úsečce BC tak, že úhly PCB a RQB jsou shodné.

Určete poměr obsahů trojúhelníků ABC a PQC .

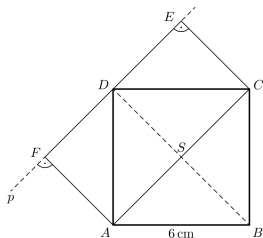
Nápad



Zadání Sestrojte čtverec $ABCD$ se stranou délky 6 cm. Sestrojte přímku p rovnoběžnou s úhlopříčkou AC a procházející bodem D . Sestrojte obdélník $ACEF$ tak, aby vrcholy E a F ležely na přímce p .

Ze zadaných údajů vypočtete obsah obdélníku $ACEF$.

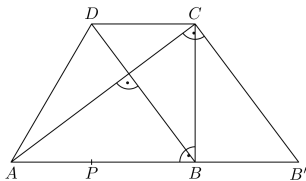
Nápad



Zadání Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem u vrcholu B a s rovnoběžnými stranami AB a CD . Úhlopříčky lichoběžníku jsou na sebe kolmé a mají délky $|AC| = 12$ cm, $|BD| = 9$ cm.

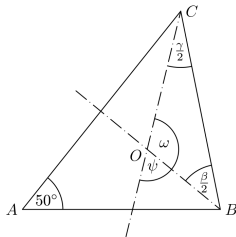
Vypočítejte obvod a obsah tohoto lichoběžníku.

Nápad



Zadání Jeden vnitřní úhel v trojúhelníku měří 50° . Jak velký úhel svírají osy zbývajících dvou vnitřních úhlů?

Nápad



Zadání Pan Vlk čekal na zastávce před školou na autobus. Z okna slyšel slova učitele:

„Jaký povrch může mít pravidelný čtyřboký hranol, víte-li, že délky všech jeho hran jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly a že jeho objem je. . . “

Toto důležité číslo pan Vlk neslyšel, protože zrovna projelo okolo auto. Za chvíli slyšel žáka hlásícího výsledek 918 cm^2 . Učitel na to řekl:

„Ano, ale úloha má celkem čtyři řešení. Hledejte dál.“

Více se pan Vlk už nedozvěděl, neboť nastoupil do svého autobusu. Protože matematika byla vždy jeho hobby, vytáhl si v autobuse tužku a papír a po čase určil i zbylá tři řešení učitelovy úlohy. Spočítejte je i vy.

Nápad

$$2a^2 + 4av = 918$$

$$a(a + 2v) = 1 \cdot 459 = 3 \cdot 153 = 9 \cdot 51 = 17 \cdot 27$$

Ukázky	2
Postřehy	11
Nápady	15
Poznámky	25
Cvičení	32

Příliš textu — viz např. s. 3:

- ▶ rozumím jednotlivostem a umím si je znázornit
- ▶ teď je všechny skloubím

Proměnná místa — viz např. s. 5:

- ▶ rozumím jednotlivostem a znázorním, co vím
- ▶ co nevím přesně, zkusím
- ▶ když nefunguje, upravím

Nejistá určitost — viz např. s. 8:

- ▶ rozumím jednotlivostem a nějak znázorním
- ▶ zjišťuji, zda zadání nepřipouští jiný výklad

Jistá neurčitost — viz např. s. 9:

- ▶ rozumím jednotlivostem a nějak znázorním
- ▶ uvědomuji si, že situace může vypadat i jinak

Jde to jako po másle — viz např. s. 7:

- ▶ hmmm

Potřebuje přimazat — viz např. s. 9:

- ▶ nebojím se experimentovat

Musí se to rozebrat — viz např. s. 5:

- ▶ rozumím jednotlivostem a vím, na čem se zakládají

Chce to nápad — viz např. s. 8:

- ▶ rozumím všemu a přemýšlím, s čím vším můžou jednotlivosti souviset

Chce to systém — viz např. s. 10:

- ▶ rozumím všemu a systematicky se probírám možnostmi

Pravítko není argument — viz např. s. 7:

- ▶ a to, ani když je nové

Možnosti je třeba diskutovat — viz např. s. 10:

- ▶ a to důsledně

Každá cesta sestává z kroků — viz např. ... VŠUDE!

- ▶ a za každým krokem je nějaká myšlenka
- ▶ a za každou myšlenkou je nějaký poznatek

Ukázky	2
Postřehy	11
Nápady	15
Poznámky	25
Cvičení	32

Lekce 2.4 Kytka Broukomilka

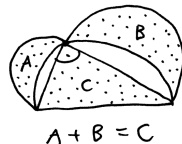
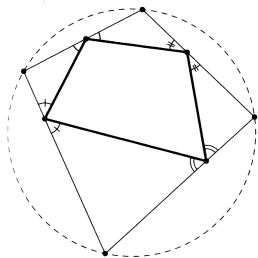
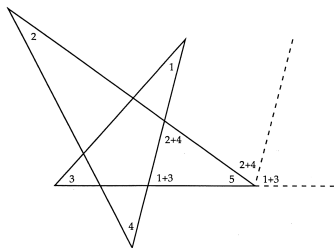
Na obrázku je zvlněná čára. Pracujte podle pokynů. Kreslete tužkou a od ruky. Splněné úkoly si označujte, třeba škrtnutím. Uvnitř vám to práci.

Pokyny:

1. Nakreslete větší kruh, který má průměr asi 4 cm. Dolní okraj kruhu je nad zvlněnou čarou ve vzdálenosti také asi 4 cm. Ve středu kruhu nakreslete malý kroužek.
2. Kolem velkého kruhu je 8 menších kruhů, které se ho dotýkají zvenku. Žádný malý kruh se nedotýká jiného malého kruhu a jsou kolem velkého kruhu stejnoměrně rozmístěné.
3. Nakreslete mírně prohnutou čáru, která spojuje dolní část velkého kruhu s vlnitou čarou pod kruhem. Čáru nakreslete tak, aby nezasahovala dovnitř kruhu a končila u zvlněné čáry.
4. Malý kruh, který je uvnitř velkého kruhu, lehce vybarvěte.
5. Na čáře, která spojuje kruh se zvlněnou čarou, vyznačte tence bod tak, aby byl níž, než je polovina výšky čáry.
6. Nakreslete dva protáhlé oválky, které mají jeden konec víc zúžený. Tím se dotýkají svislé čáry ve vyznačeném bodě. Jeden oválek míří doleva, druhý doprava.
7. Asi se vám podařilo nakreslit kytku se dvěma lístky na stonku. Nenecháme ji samotnou. Zkuste ještě pokračovat.
8. Vpravo od kytky nakreslete tři menší kroužky, aby byly vedle sebe v řadě, dotýkal se první druhého a druhý třetího a byly nad zvlněnou čarou asi ve výšce 2 cm. Prostřední kroužek je trochu menší, krajní jsou stejné.
9. K dolnímu okraji prvního a třetího kroužku nakreslete dvě velká tiskací písmena L blízko u sebe. Nakreslete je tak, aby se zahnuté čárky z písmenka dotýkaly zvlněné čáry. Asi tušíte, co se tu klube na světě.
10. Na kroužku, který je nejdál od kytky, si lehce vyznačte bod v místě, kde je asi na hodinách číslice 2. Z tohoto místa nakreslete klikatou čáru podobnou té, jakou má zmije na hřbetě, která míří šikmo nahoru a není delší než 2 cm.
11. Ke konci klikaté čáry přikreslete stejný kroužek, jako je ten na druhém konci.
12. Na jeho horní části stojí vedle sebe dvě velká tiskací písmena T. Nakreslete je tam.
13. Uvnitř kroužku udělejte tmavý puntík, který je spíš v jeho horní části.
14. Pokud jste postupovali správně, objevil se na obrázku brouk. Až vám paní učitelka - pan učitel dovolí, můžete obrázek ještě doplnit. Vymyslete květině i broukovi hezká a veselá jména.

Lze trénovat na rozličné úrovni. . .
(předchozí ukázka pro nejmenší čtenáře)

Obecná rada zní „rozděl a panuj“.

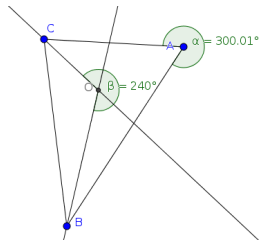
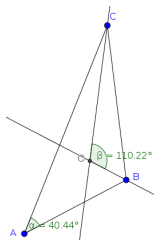
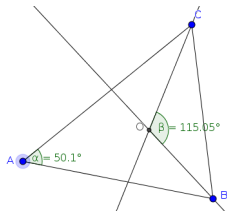


¹²O. Byrne, *The Elements of Euclid*, London, 1847, R.B. Nelsen, *Proofs without words*, MAA, 1993, A. Apokyan, *Geometry of figures*, IST, 2017

Jiný pohled na věc!

Předchozí ukázky postupně znázorňují

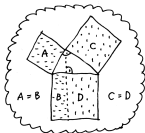
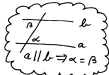
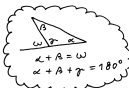
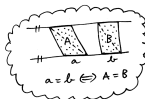
- ▶ základní větu o obsahích rovnoběžníků a podstatnou část důkazu
(*stejná základna a stejná výška \implies stejný obsah*)
- ▶ tvrzení o vyznačených úhlech hvězdy a návod k důkazu
(*součet úhlů 1 až 5 je přímý*)
- ▶ tvrzení o jistém opsaném čtyřúhelníku k obecnému čtyřúhelníku
(*vyznačené úhly shodné \implies opsaný čtyřúhelník je tětiový*)
- ▶ Hippokratovy, resp. Alhazenovy pŕlmesíce
(*pŕlmesíce ohraničené pŕlkružnicemi opsanými nad stranami pravoúhlého trojúhelníku mají v součtu stejný obsah jako onen trojúhelník*)



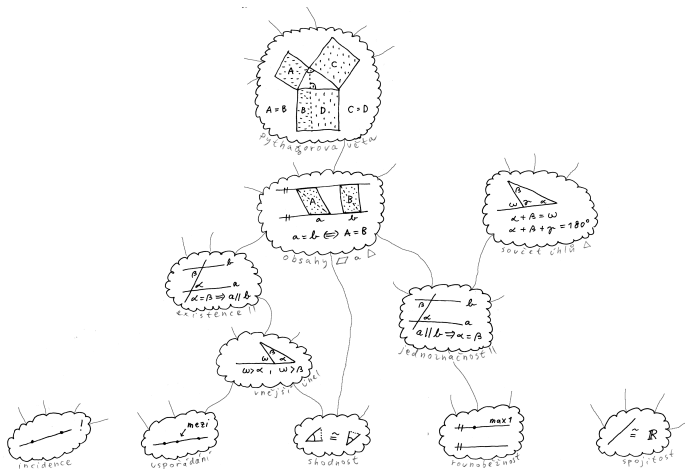
¹³... zde k ukázce na s. 9 pomocí <http://www.geogebra.org/>

Téměř každá úloha dovoluje nějaké zkoušení.
To je však jenom začátek. . .

Obecná rada zní „zkus a zobecni“.



Takto???

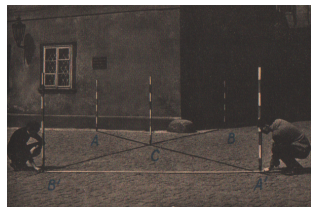
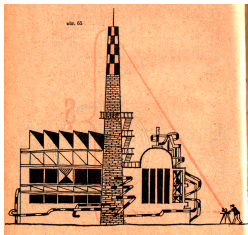
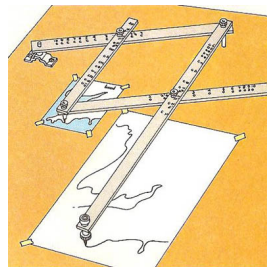
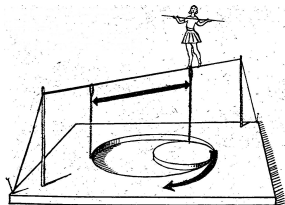


TAKTO!!!

Povědomí o souvislostech pomáhá v jednotlivostech.
Povědomí o jejich hierarchii pomáhá při zdůvodňování.

Obecná rada zní „ptej se proč a nač“.

Ukázky	2
Postřehy	11
Nápady	15
Poznámky	25
Cvičení	32



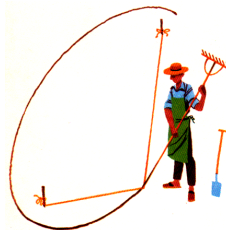
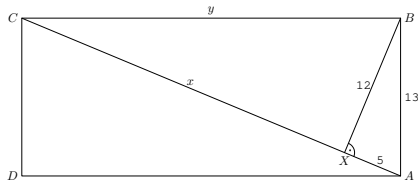
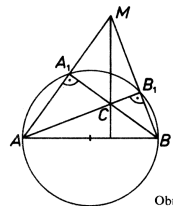
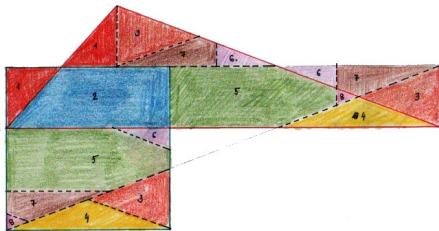
¹⁵J.I. Perelman, *Zajímavá geometrie*, Praha, 1954, J. Kúst a kol., *Geometrie pro 7. ročník*, SPN, 1962, V. Macháček a kol., *Geometrie pro 8. ročník*, SPN, 1963

Je dobré vědět, k čemu jsou procvičované poznatky dobré!

Předchozí ukázky postupně znázorňují

- ▶ provazochodkyni
(a mechanické zařízení převádějící otáčivý pohyb na přímočarý)¹⁶
- ▶ pantograf
(tj. mechanické zařízení s rovnoběžníkem, zde použito ke zvětšování)
- ▶ měření komínu
(a trigonometrii v praxi)
- ▶ měření nepřístupné úsečky
(a stejnolehlost v praxi)

¹⁶... poměr poloměrů kružnic je 1 : 2



¹⁷K. Nedvěďová, MU, 2009, A.G. Konforovič, *Významné matematické úlohy*, SPN, 1989, M. Mach, MO, 2011, L. Görkeová a kol., *Zajímavá matematika*, Albatros, 1976

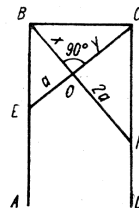
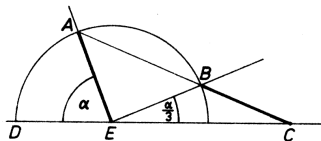
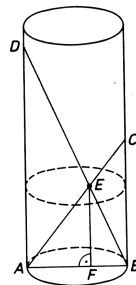
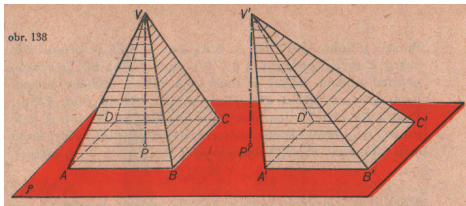
Běžně procvičované poznatky je snadné (a vhodné) mírně rozšiřovat!

Předchozí ukázky postupně znázorňují

- ▶ kvadraturu trojúhelníku se stříháním
(*dva mnohoúhelníky mají stejný obsah \iff jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý*)¹⁸
- ▶ neobvyklou konstrukci kolmice
(zde $MC \perp AB$ sestrojeno s jedinou pomocnou kružnicí)
- ▶ motivaci k tzv. Eukleidově větě o výšce
(zde $5 \cdot x = 12 \cdot 12$)
- ▶ obvyklou konstrukci elipsy
(zde pomocí hrábí; jednotlivé body však lze dělat pravítkem a kružítkem...)

Viz též ukázky na s. 18 a 26...

¹⁸... podstatným krokem je transformace obdélníku na čtverec, viz JZ–SV čáru



¹⁹V. Macháček a kol., *Geometrie pro 8. ročník*, SPN, 1963, A.G. Konforovič, *Významné matematické úlohy*, SPN, 1989, S. Kowal, *Matematika pro volné chvíle*, SNTL, 1975

Když dva dělají totéž (nebo něco podobného), nemusí to být totéž (nebo něco podobného)!

Předchozí ukázky postupně znázorňují

- ▶ jehlany se stejným objemem
(což obecně nelze porovnat střiháním a přikládáním jako u mnohoúhelníků)²⁰
- ▶ hádanku se stvolý ve studni²¹
(což obecně nelze udělat pravítkem a kružítkem; vede k rovnici 4. stupně)
- ▶ třetění úhlu s přikládáním
(což obecně nelze udělat pravítkem a kružítkem; vede k rovnici 3. stupně)
- ▶ třetí odmocninu s přikládáním²²
(což obecně nelze udělat pravítkem a kružítkem)

²⁰... viz též Cavalieriho princip

²¹... v pravoúhlém lichoběžníku $ABCD$ dáno AC , BD , EF , chceme AB

²²... v pravoúhlém lichoběžníku $BCFE$ dáno $BF \perp CE$, $OF = 2 OE$, vychází $OB = \sqrt[3]{2} OE$

Ukázky	2
Postřehy	11
Nápady	15
Poznámky	25
Cvičení	32

V souboru `I-smes.pdf` jsou odděleně zadání, nápovědy, řešení, poznámky a obrázky ke všem výše citovaným úlohám z MO.

- ▶ Rozstříhejte, zamíchejte a přiřaďte, co k sobě patří.
- ▶ Navrhněte jiné nápady a řešení.
- ▶ Zamyslete se nad možnými návodnými úlohami.

(Původní podoba komentářů ke všem úlohám je shromážděna v souboru `I-sber.pdf`)

V souboru `II-smes.pdf` jsou zadání několika jednodušších úloh.

- ▶ Přiřaďte vybrané úlohy k předchozím úlohám tak, aby sloužily jako návodné.
- ▶ Navrhněte jiné návodné úlohy.
- ▶ Zamyslete se nad souvisejícími základními poznatky.

(Příklad možného přiřazení je v souboru `II-priklad.pdf`)

V souboru `III-smes.pdf` je několik skupin tvrzení.

- ▶ Uspořádejte tvrzení ve skupině tak, aby tvořila navazující posloupnost (a byla všechna použita).
- ▶ Uvědomte si, které poznatky jste takto dokázali, příp. jaká mají přízviska.
- ▶ Zamyslete se nad jinými důkazy a souvisejícími základními poznatky.

(Příklad možného uspořádání a interpretace je v souboru `III-priklad.pdf`)

V souboru `IV-smes.pdf` je schematicky znázorněno několik základních geometrických poznatků.

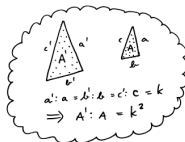
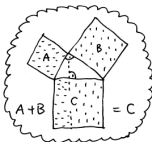
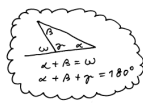
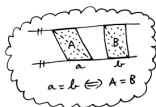
- ▶ Uvědomte si, které poznatky jsou takto znázorněny, příp. jaká mají přízviska.
- ▶ Přiřaďte použité poznatky k výše řešeným úlohám.
- ▶ Zamyslete se nad dalšími základními poznatky, jejich návaznostmi a souvislostmi.

(Příklad možné organizace základních poznatků²³ je v souboru `IV-zaklady.pdf`)

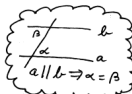
²³podle Eukleida, resp. Hilberta, viz <http://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/>

Při řešení úloh se odkazujeme na nejbližší relevantní poznatky.

Ve školských planimetrických úlohách to jsou (asi) nejčastěji:²⁴



Nejbližším společným předchůdcem těchto (a mnoha dalších) poznatků je:²⁵



²⁴věty o obsahích rovnoběžníků, o součtu úhlů v trojúhelníku, Pythagorova věta, o podobných útvarcích a jejich obsahích

²⁵věta o střídavých úhlech