MO63–Z9–II–2

Renata si sestrojila lichoběžník $PRST$ se základnami PR a ST, ve kterém současně platí:

- lichoběžník $PRST$ není pravoúhlý;
- trojúhelník TRP je rovnostranný;
- trojúhelník TRS je pravoúhlý;
- jeden z trojúhelníků TRS, TRP má obsah $10\,\mathrm{cm}^2$.

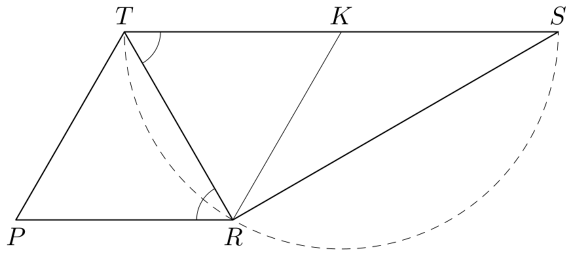
Určete obsah druhého z těchto dvou trojúhelníků. Najděte všechny možnosti. (*M. Petrová*)

Možné řešení. Ze druhé podmínky víme, že trojúhelník TRP je rovnostranný, proto všechny jeho vnitřní úhly mají velikost 60°. Úhly TRP a STR jsou střídavé, proto je také velikost úhlu STR rovna 60°.

Ze třetí podmínky víme, že trojúhelník TRS je pravoúhlý. Z předchozího odstavce víme, že pravý úhel nemůže být při vrcholu T, zároveň z první podmínky plyne, že pravý úhel nemůže být ani při vrcholu S. Takže pravý úhel je při vrcholu R. Dále označíme K střed přepony ST trojúhelníku TRS. Protože je tento trojúhelník pravoúhlý, leží vrchol R na kružnici se středem K a poloměrem $|KS| = |KT|$. Platí tedy

$$|KS| = |KT| = |KR|.$$

Trojúhelník TRK je tedy rovnoramenný se základnou RT. Navíc z předchozího víme, že úhel RTK má velikost 60°, proto i druhý úhel při základně má velikost 60°. Trojúhelník TRK je tedy rovnostranný a navíc shodný s rovnostranným trojúhelníkem TRP.



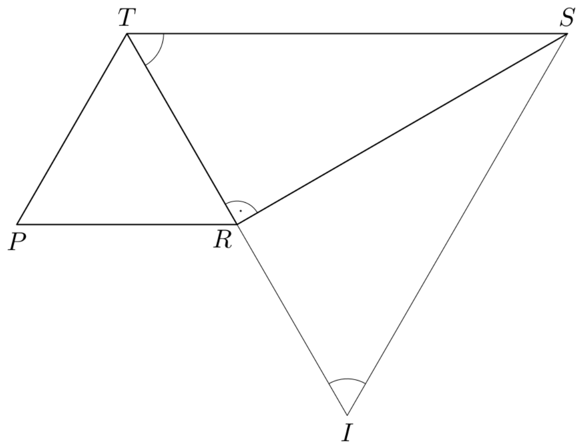
Trojúhelníky TRP a TRK mají stejný obsah, protože jsou shodné. Trojúhelníky TRK a SRK mají stejný obsah, protože strany KT a KS jsou stejně dlouhé a výška na tyto strany je společná. To znamená, že trojúhelník TRS má dvakrát větší obsah než trojúhelník TRP,

$$S_{TRS} = 2S_{TRP}. \tag{1}$$

Ze čtvrté podmínky víme, že obsah jednoho z těchto dvou trojúhelníků je $10\,\mathrm{cm}^2$:

- Je-li $S_{TRS} = 10\,\mathrm{cm}^2$, potom $S_{TRP} = 5\,\mathrm{cm}^2$.
- Je-li $S_{TRP} = 10\,\mathrm{cm}^2$, potom $S_{TRS} = 20\,\mathrm{cm}^2$.

Jiné řešení. Stejným způsobem jako v předchozím řešení určíme vnitřní úhly trojúhelníku TRS. Bod T zobrazíme v osové souměrnosti podle osy RS, symetrický bod označíme I. Všechny vnitřní úhly trojúhelníku TIS mají velikost 60°, trojúhelník je tedy rovnostranný.



Strana TI je dvojnásobkem strany TR, trojúhelníky TRP a TIS jsou tedy podobné s poměrem podobnosti $1:2$. Proto jsou jejich obsahy v poměru $1:4$,

$$S_{TIS} = 4S_{TRP}.$$

Trojúhelník TRS tvoří polovinu trojúhelníku TIS, jeho obsah je tedy dvakrát větší než obsah trojúhelníku TRP. Tak docházíme ke vztahu (1) a úlohu uzavřeme stejně jako v předchozím řešení.

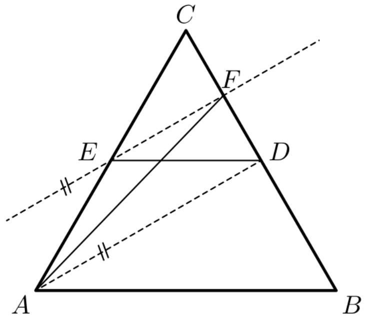
MO67–Z8–II–3

V rovnostranném trojúhelníku ABC se stranou délky 8 cm je bod D střed strany BC a bod E je střed strany AC. Bod F leží na úsečce BC tak, že obsah trojúhelníku ABF je stejný jako obsah čtyřúhelníku $ABDE$.

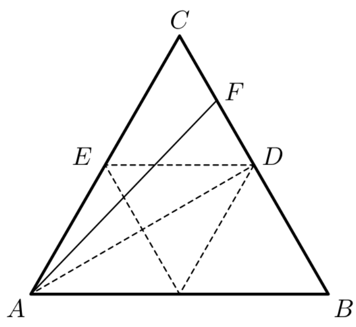
Vypočtěte délku úsečky BF. (*L. Růžičková*)

Možné řešení. Jak čtyřúhelník $ABDE$, tak trojúhelník ABF lze rozdělit na dva trojúhelníky, z nichž ABD je společný oběma. Zbývající části, tj. trojúhelníky ADE a ADF, proto musejí mít stejný obsah. Tyto dva trojúhelníky mají společnou stranu AD, proto musejí mít i stejnou výšku na tuto stranu. To znamená, že body E a F leží na rovnoběžce s přímkou AD.

Jelikož je bod E středem strany AC, je také bod F středem úsečky CD. Přitom bod D je středem úsečky BC, bod F je proto ve třech čtvrtinách úsečky BC. Hledaná délka úsečky BF je $4 + 2 = 6$ cm.



Jiné řešení. Rovnostranný trojúhelník ABC je svými středními příčkami rozdělen na čtyři shodné trojúhelníky, z nichž tři tvoří čtyřúhelník $ABDE$. Proto také obsah trojúhelníku ABF je roven třem čtvrtinám obsahu trojúhelníku ABC. Tyto dva trojúhelníky mají stejnou výšku ze společného vrcholu A, proto délka strany BF je rovna třem čtvrtinám délky strany BC. Hledaná délka úsečky BF je $6\,\mathrm{cm}$.



Jiné řešení. Úsečka ED je střední příčkou trojúhelníku ABC, proto je rovnoběžná s AB a má délku $8 : 2 = 4\,(\mathrm{cm})$. Čtyřúhelník $ABDE$ je lichoběžníkem se základnami délek $8\,\mathrm{cm}$ a $4\,\mathrm{cm}$ a výškou, která je rovna polovině výšky trojúhelníku ABC.

Pokud velikost výšky trojúhelníku ABC označíme v, potom obsah lichoběžníku $ABDE$, resp. obsah trojúhelníku ABF je

$$\frac{(8+4)\cdot\frac{v}{2}}{2} = 3\cdot v, \quad \text{resp.} \quad \frac{|BF|\cdot v}{2}.$$

Podle zadání jsou tyto obsahy stejné, proto $|BF| = 6\,\mathrm{cm}$.

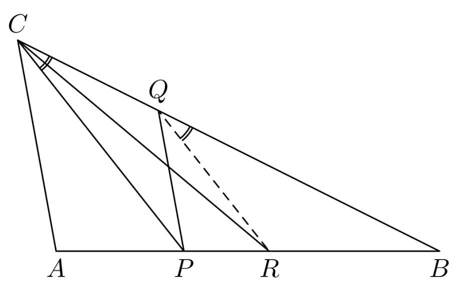
MO69–Z9–I–2

V trojúhelníku ABC leží bod P ve třetině úsečky AB blíže bodu A, bod R je ve třetině úsečky PB blíže bodu P a bod Q leží na úsečce BC tak, že úhly PCB a RQB jsou shodné.

Určete poměr obsahů trojúhelníků ABC a PQC. (*L. Růžičková*)

Nápověda. V popsané změti bodů lze najít více trojúhelníků, jejichž obsahy lze porovnávat.

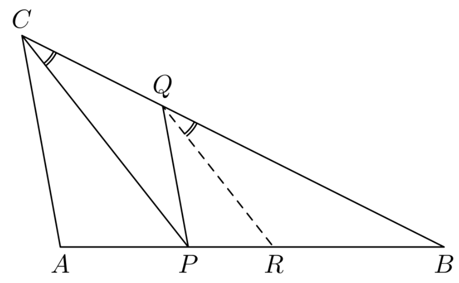
Možné řešení. Body C, Q a B leží na jedné přímce a úhly PCB a RQB jsou shodné. Tedy přímky PC a RQ jsou rovnoběžné, trojúhelníky PCQ a PCR mají stejnou výšku na stranu PC, a tak i stejný obsah. Poměr obsahů trojúhelníků ABC a PCQ je proto stejný jako poměr obsahů trojúhelníků ABC a PCR.



Trojúhelníky ABC a PRC mají stejnou výšku ze společného vrcholu C, tedy poměr jejich obsahů je stejný jako poměr délek stran AB a PR. Poměr délek úseček AB a PB je $3 : 2$, poměr délek úseček PB a PR je $3 : 1$, tedy poměr délek úseček AB a PR je $(3 : 2) \cdot (3 : 1) = 9 : 2$.

Poměr obsahů trojúhelníků ABC a PQC je $9 : 2$.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení si všimneme, že přímky PC a RQ jsou rovnoběžné. Odtud vyplývá, že bod Q na úsečce CB je ve stejném poměru jako bod R na úsečce PB, tj. v jedné třetině blíže bodu C. Ve stejném poměru jsou proto i obsahy trojúhelníků PQC a PQB, neboť mají stejnou výšku z vrcholu P.



Bod Q na úsečce CB je však také ve stejném poměru jako bod P na úsečce AB, tedy trojúhelníky PQB a ACB jsou podobné a koeficient podobnosti je 2 : 3. Jejich obsahy jsou tedy v poměru 4 : 9.

Dohromady, poměr obsahů trojúhelníků ABC a PQB je 9 : 4, poměr obsahů trojúhelníků PQB a PQC je 2 : 1, tedy poměr obsahů trojúhelníků ABC a PQC je $(9 : 4) \cdot (2 : 1) = 9 : 2$.

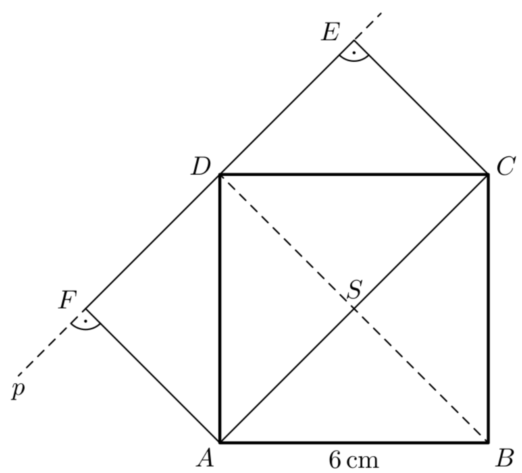
MO67–Z6–II–3

Sestrojte čtverec $ABCD$ se stranou délky 6 cm. Sestrojte přímku p rovnoběžnou s úhlopříčkou AC a procházející bodem D. Sestrojte obdélník $ACEF$ tak, aby vrcholy E a F ležely na přímce p.

Ze zadaných údajů vypočtěte obsah obdélníku $ACEF$. (*L. Růžičková*)

Možné řešení. Konstrukce:

- Čtverec $ABCD$ se stranou délky 6 cm,
- přímka p jako rovnoběžka s přímkou AC (resp. kolmice k přímce BD) jdoucí bodem D,
- bod E jako pata kolmice k přímce p jdoucí bodem C,
- bod F jako pata kolmice k přímce p jdoucí bodem A.



Výpočet: Úhlopříčky ve čtverci jsou shodné, navzájem kolmé a jejich průsečík je středem obou úhlopříček. Průsečík úhlopříček ve čtverci $ABCD$ označíme S.

Z uvedeného vyplývá, že čtverec $ABCD$ je úhlopříčkami rozdělen na čtyři navzájem shodné trojúhelníky ABS, BCS, CDS a DAS. Dále obdélník $ACEF$ je úsečkou SD rozdělen na dva shodné čtverce, přičemž každý z nich je dále rozdělen úhlopříčkou (CD, resp. DA) na dva shodné trojúhelníky. Jak čtverec $ABCD$, tak obdélník $ACEF$ tedy sestává ze čtyř navzájem shodných trojúhelníků, z nichž dva jsou oběma útvarům společné. Proto má obdélník $ACEF$ stejný obsah jako čtverec $ABCD$, a ten je

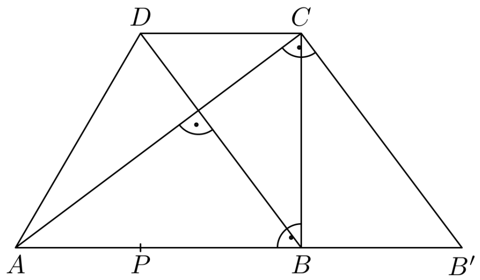
$$6 \cdot 6 = 36\,(\mathrm{cm}^2).$$

MO62–Z9–I–6

Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem u vrcholu B a s rovnoběžnými stranami AB a CD. Úhlopříčky lichoběžníku jsou na sebe kolmé a mají délky $|AC| = 12\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 9\,\mathrm{cm}$. Vypočítejte obvod a obsah tohoto lichoběžníku. (*M. Krejčová*)

Nápověda. Obsah tohoto lichoběžníku je stejný jako obsah vhodného pravoúhlého trojúhelníku. Nejprve najděte takový trojúhelník, poté určete délky stran lichoběžníku a jeho obvod.

Možné řešení. Bodem C vedeme rovnoběžku s úhlopříčkou BD a její průsečík s přímkou AB označíme B', viz obrázek. Protože přímky AB a CD jsou také rovnoběžné, je $BB'CD$ kosodélník a platí $|B'C| = |BD| = 9\,\mathrm{cm}$ a $|B'B| = |CD|$.



Smysl této konstrukce spočívá v pozorování, že trojúhelníky ACD a $CB'B$ mají stejný obsah (strany CD a $B'B$ jsou shodné a výšky obou trojúhelníků na tyto strany jsou stejné). Proto je obsah lichoběžníku $ABCD$ stejný jako obsah trojúhelníku $AB'C$ a tento umíme snadno určit: Z konstrukce plyne, že trojúhelník $AB'C$ je pravoúhlý, a ze zadání známe obě jeho odvěsny $|AC| = 12\,\mathrm{cm}$ a $|B'C| = 9\,\mathrm{cm}$. Obsah trojúhelníku $AB'C$, tedy i zadaného lichoběžníku, je roven

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54\,(\mathrm{cm}^2).$$

Abychom určili obvod lichoběžníku, potřebujeme znát délky všech jeho stran.

a) Strana BC je výškou na stranu AB' v právě zmiňovaném trojúhelníku. Z Pythagorovy věty spočítáme délku přepony v trojúhelníku $AB'C$:

$$|AB'| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15\,(\mathrm{cm}).$$

Ze znalosti obsahu tohoto trojúhelníku určíme jeho výšku $|BC|$:

$$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot |BC| = 54,$$
$$|BC| = 7{,}2\,(\mathrm{cm}).$$

b) V pravoúhlém trojúhelníku ABC známe jeho přeponu a nyní také jednu odvěsnu; pomocí Pythagorovy věty určíme délku druhé odvěsny:

$$|AB| = \sqrt{12^2 - 7{,}2^2} = 9{,}6\,(\mathrm{cm}).$$

c) Zřejmě platí $|AB'| = |AB| + |BB'|$ a $|BB'| = |CD|$, odkud snadno vyjádříme délku strany CD:

$$|CD| = |AB'| - |AB| = 15 - 9,6 = 5,4\,(\text{cm}).$$

d) Stranu AD můžeme vidět jako přeponu v pravoúhlém trojúhelníku APD, kde P je pata kolmice z bodu D na stranu AB. Délky odvěsen v tomto trojúhelníku jsou $|PD| = |BC| = 7,2\,\text{cm}$ a $|AP| = |AB| - |CD| = 9,6 - 5,4 = 4,2\,(\text{cm})$. Podle Pythagorovy věty spočítáme i délku přepony:

$$|AD| = \sqrt{7,2^2 + 4,2^2} \doteq 8,3\,(\text{cm}).$$

Obvod zadaného lichoběžníku je tedy přibližně roven

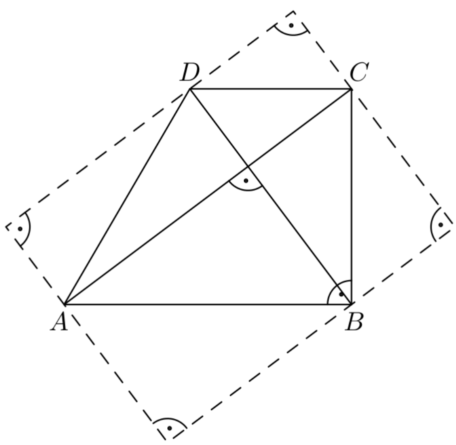
$$o = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| \doteq 9,6 + 7,2 + 5,4 + 8,3 = 30,5\,(\text{cm}).$$

Poznámka. Pro zajímavost a kontrolu uvádíme ještě výpočet obsahu lichoběžníku pomocí obvyklého vzorce:

$$S = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot |BC| = \frac{1}{2}(9,6 + 5,4) \cdot 7,2 = 54\,(\text{cm}^2).$$

Všimněte si, že úvahy v úvodu našeho řešení platnost tohoto vzorce vlastně zdůvodňují.

Vztah pro výpočet obsahu zadaného lichoběžníku lze odvodit také pomocí následujícího obrázku. Na něm je čárkovaně znázorněn obdélník, jehož každá strana prochází některým vrcholem lichoběžníku a je rovnoběžná s některou jeho úhlopříčkou. Obsah obdélníku je roven součinu $|AC| \cdot |BD|$. Obsah lichoběžníku je evidentně poloviční, tedy $S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|$.

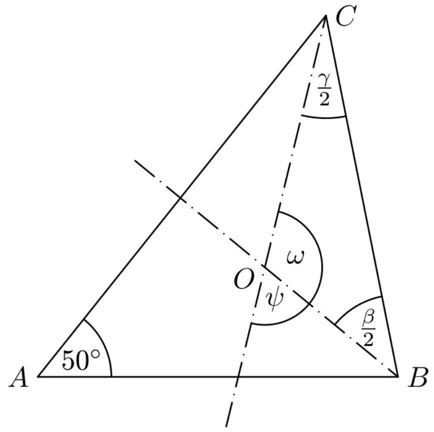


MO61–Z7–I–5

Jeden vnitřní úhel v trojúhelníku měří 50°. Jak velký úhel svírají osy zbývajících dvou vnitřních úhlů? *(L. Hozová)*

Nápověda. Nemusíte znát velikosti zbylých vnitřních úhlů, abyste úlohu dořešili.

Možné řešení. Uvažujme trojúhelník ABC s úhlem 50° u vrcholu A; neznámé úhly u vrcholů B a C označíme β a γ. Průsečík os vnitřních úhlů označíme O, úhel BOC označíme ω a úhel k němu vedlejší ψ.



Součet vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je 180°. Proto i v trojúhelnících ABC a OBC platí

$$50^\circ + \beta + \gamma = 180^\circ,$$
$$\omega + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ.$$

Z druhé rovnosti a z toho, že ω a ψ jsou vedlejší úhly, plyne

$$\psi = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Z první rovnosti vyjádříme

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ,$$

tudíž odchylka os zbývajících dvou vnitřních úhlů je 65°.

Poznámka. Odpověď, že osy svírají úhel $\omega = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$, považujte také za správnou.

MO60–Z9–I–1

Pan Vlk čekal na zastávce před školou na autobus. Z okna slyšel slova učitele:

„Jaký povrch může mít pravidelný čtyřboký hranol, víte-li, že délky všech jeho hran jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly a že jeho objem je. . . “

Toto důležité číslo pan Vlk neslyšel, protože zrovna projelo okolo auto. Za chvíli slyšel žáka hlásícího výsledek $918\,\mathrm{cm}^2$. Učitel na to řekl:

„Ano, ale úloha má celkem čtyři řešení. Hledejte dál.“

Více se pan Vlk už nedozvěděl, neboť nastoupil do svého autobusu. Protože matematika byla vždy jeho hobby, vytáhl si v autobuse tužku a papír a po čase určil i zbylá tři řešení učitelovy úlohy. Spočítejte je i vy. (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Proměnné a a v jsou přirozená čísla a představují hranu podstavy pravidelného čtyřbokého hranolu a jeho výšku. Pro rozměry, které uvažoval přihlásivší se žák, platí

$$918 = 2a^2 + 4av = 2a \cdot (a + 2v),$$

po vydělení dvěma dostaneme

$$459 = a \cdot (a + 2v).$$

Budeme hledat všechny dvojice a, v, které odpovídají tomuto vztahu. Určíme tedy všechny možné rozklady čísla 459 ($459 = 3^3 \cdot 17$) na součin dvou přirozených čísel, z nichž menší bude a a větší bude

$a + 2v$. Následující tabulka ukazuje, že takové rozklady existují čtyři a každý vede k celočíselnému v. Pro všechny nalezené dvojice a, v pak spočítáme objem, který by učitel musel zadat, a jeho prvočíselný rozklad:

	a	$a+2v$	v	$a^2 \cdot v$
1. možnost	1	459	229	$1^2 \cdot 229 = 229$
2. možnost	3	153	75	$3^2 \cdot 75 = 3^3 \cdot 5^2$
3. možnost	9	51	21	$9^2 \cdot 21 = 3^5 \cdot 7$
4. možnost	17	27	5	$17^2 \cdot 5 = 17^2 \cdot 5$

Učitel prozradil, že zadaný objem vede ke čtyřem řešením. U každého objemu v tabulce určíme, ke kolika řešením vede, tedy pro každý objem najdeme všechna možná a:

	$a^2 \cdot v$	možná a
1. možnost	229	1
2. možnost	$3^3 \cdot 5^2$	1, 3, 5, 15
3. možnost	$3^5 \cdot 7$	1, 3, 9
4. možnost	$17^2 \cdot 5$	1, 17

Vidíme, že jedině 2. možnost vede ke čtyřem hranolům. Učitel tedy zadal objem $3^3 \cdot 5^2 = 675\,(\mathrm{cm}^3)$ a první žák uvažoval tyto rozměry: $a = 3\,\mathrm{cm}$, $v = 75\,\mathrm{cm}$. Níže uvádíme, jaké další rozměry hranolu měli žáci nalézt a jaký povrch z nich měli vypočítat:

a	1	5	15
v	675	27	3
$2a^2 + 4av$	2702	590	630

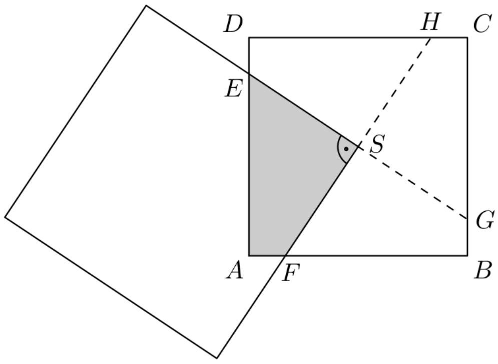
Učitel čekal na tato další tři řešení: $590\,\mathrm{cm}^2$, $630\,\mathrm{cm}^2$ a $2702\,\mathrm{cm}^2$.

MO65–Z8–II–3

Dobrákovi pěstovali tulipány na čtvercovém záhonu o straně 6 metrů. Později přistavěli k svému domku čtvercovou terasu se stranou 7 metrů. Jeden vrchol terasy ležel přesně uprostřed tulipánového záhonu a jedna strana terasy dělila stranu tulipánového záhonu v poměru 1 : 5.

V jakém poměru dělila druhá strana terasy druhou stranu záhonu? O kolik metrů čtverečních se stavbou terasy zmenšil záhon tulipánů? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Vrcholy čtverce tulipánového záhonu označíme A, B, C, D, střed tohoto čtverce S a průsečíky stran čtverce se stranami terasy E, F, viz obrázek.

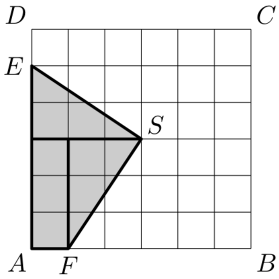


Při otáčení kolem středu S o celočíselné násobky úhlu 90° se čtverec $ABCD$ zobrazuje sám na sebe. Uvažme např. otáčení, při kterém se vrchol A zobrazuje na vrchol B, a tedy strana DA na stranu AB. Body E a F leží právě na těchto stranách, úhel ESF je podle zadání pravý, a proto se bod E zobrazuje na bod F. Obě strany záhonu jsou tedy stranami terasy rozděleny ve stejném poměru, tj.

$$|DE| : |EA| = |AF| : |FB| = 1 : 5.$$

Ještě označme G a H průsečíky přímek SE a SF se zbylými stranami čtverce $ABCD$. Při uvažovaném otáčení se bod B zobrazuje na bod C, bod F se zobrazuje na bod G atd. Zejména všechny čtyřúhelníky $SEAF$, $SFBG$, $SGCH$ a $SHDE$ jsou navzájem shodné. Tyto čtyři čtyřúhelníky tvoří celý čtverec $ABCD$, jehož obsah je $6 \cdot 6 = 36\,(\mathrm{m}^2)$. Obsah každého z nich je proto roven $36 : 4 = 9\,(\mathrm{m}^2)$. Stavbou terasy se záhon tulipánů zmenšil o $9\,\mathrm{m}^2$.

Jiné řešení. Při stejném značení jako výše rozdělme čtverec $ABCD$ pomocnou čtverečkovou sítí na čtverečky se stranami $1\,\mathrm{m}$ a předpokládejme, že bod E dělí stranu DA v poměru $1 : 5$. Zejména body E a S jsou uzlovými body čtverečkové sítě, viz obrázek.

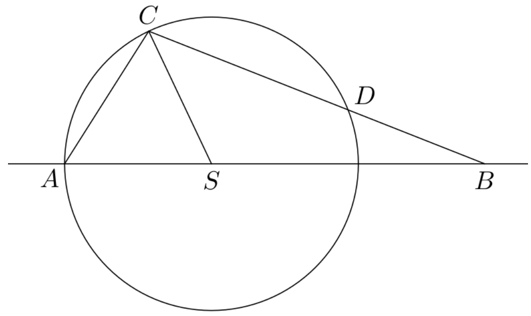


Úhel ESF je pravý právě tehdy, když vyznačené pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, což nastává právě tehdy, když F je uzlovým bodem dělicím stranu AB v poměru $1 : 5$. Obě strany záhonu jsou tedy stranami terasy rozděleny ve stejném poměru.

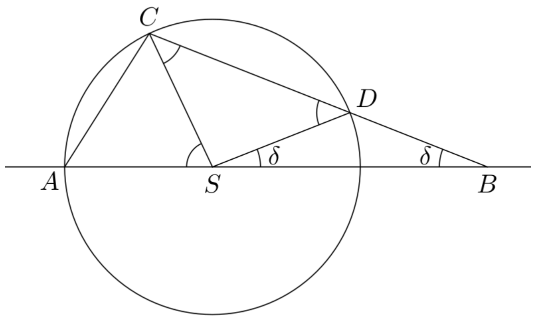
Obsah čtyřúhelníku $SEAF$ je roven součtu obsahů tří vyznačených částí, z nichž každá má obsah $3\,\mathrm{m}^2$. Stavbou terasy se záhon tulipánů zmenšil o $9\,\mathrm{m}^2$.

MO60–Z7–I–5

Libor narýsoval kružnici se středem S a body A, B, C, D, jak ukazuje obrázek. Zjistil, že úsečky SC a BD jsou stejně dlouhé. V jakém poměru jsou velikosti úhlů ASC a SCD? (*L. Hozová*)



Možné řešení. Ze zadání víme, že $|SC| = |BD|$, navíc $|SC| = |SD|$, protože jde o velikost poloměru kružnice. Trojúhelníky CSD a BDS jsou proto rovnoramenné. Označme $|\angle DSB| = |\angle DBS| = \delta$, viz obrázek.



Protože součet vnitřních úhlů v trojúhelníku BDS je 180°, platí

$$\delta + \delta + |\angle BDS| = 180°,$$

a jelikož úhel BDC je přímý, platí

$$|\angle SDC| + |\angle BDS| = 180°.$$

Z uvedených dvou rovnic je zřejmé, že $|\angle SDC| = 2\delta$. Protože trojúhelník CSD je rovnoramenný, je i $|\angle SCD| = 2\delta$. Poněvadž součet vnitřních úhlů v trojúhelníku CSD je 180° a úhel BSA je přímý, dostáváme tyto rovnice:

$$2\delta + 2\delta + |\angle CSD| = 180°,$$
$$|\angle ASC| + |\angle CSD| + \delta = 180°.$$

Z nich vyplývá, že $|\angle ASC| = 3\delta$. Úloha se ptá na poměr $|\angle ASC| : |\angle SCD|$. Po dosazení dostaneme $3\delta : 2\delta$, neboli $3 : 2$.

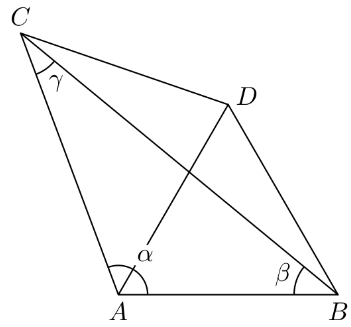
MO67–Z7–I–5

Prokop sestrojil trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhel u vrcholu A byl větší než 60° a vnitřní úhel u vrcholu B byl menší než 60°. Jirka narýsoval v polorovině vymezené přímkou AB a bodem C bod D, a to tak, že trojúhelník ABD byl rovnostranný. Poté chlapci zjistili, že trojúhelníky ACD a BCD jsou rovnoramenné s hlavním vrcholem D.

Určete velikost úhlu ACB. *(E. Semerádová)*

Nápověda. Najděte vztahy mezi vnitřními úhly zmiňovaných trojúhelníků.

Možné řešení. Velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC označíme postupně α, β, γ. V rovnostranném trojúhelníku ABD mají všechny vnitřní úhly velikost $60°$.



Shodné úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku BCD mají velikost

$$|\angle BCD| = |\angle CBD| = |\angle ABD| - |\angle ABC| = 60° - \beta.$$

Shodné úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku ACD mají velikost

$$|\angle ACD| = |\angle CAD| = |\angle CAB| - |\angle DAB| = \alpha - 60°.$$

Velikost neznámého úhlu ACB můžeme vyjádřit jako

$$\gamma = |\angle ACD| - |\angle BCD| = (\alpha - 60°) - (60° - \beta) = \alpha + \beta - 120°.$$

Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC je $180°$, tedy

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta - 120°) = 180°,$$

z čehož plyne $\alpha + \beta = 150°$. Úhel ACB má velikost $\gamma = 150° - 120° = 30°$.

Poznámka. Zadaným podmínkám odpovídá nekonečně mnoho situací; γ je vždy $30°$, zbylých $150°$ může být mezi α a β rozděleno libovolně.

Všechny body A, B, C leží na jedné kružnici se středem v bodě D. V takových případech obecně platí, že velikost úhlu ACB je polovinou úhlu ADB (viz větu o obvodovém a středovém úhlu).

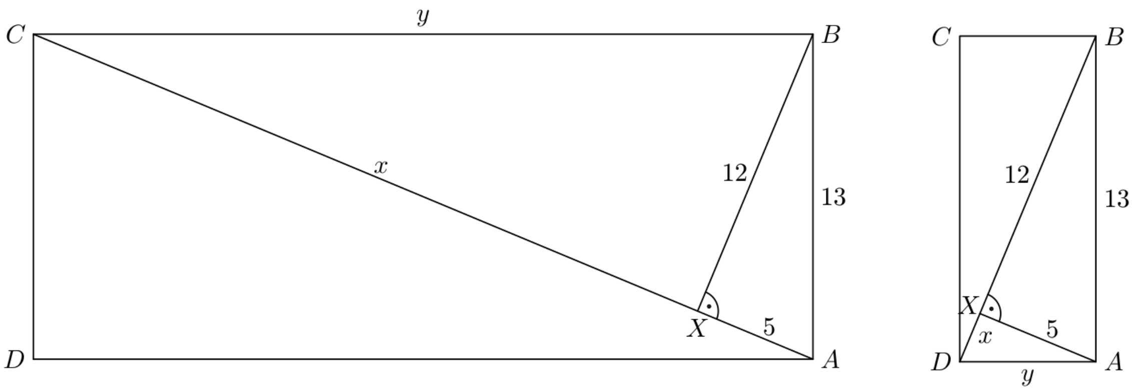
MO61–Z9–I–6

V obdélníkové zahradě roste broskvoň. Tento strom je od dvou sousedních rohů zahrady vzdálen 5 metrů a 12 metrů a vzdálenost mezi zmíněnými dvěma rohy je 13 metrů. Dále víme, že broskvoň stojí na úhlopříčce zahrady. Jak velká může být plocha zahrady? (*M. Mach*)

Nápověda. Užijte vhodně Pythagorovu větu, příp. větu opačnou.

Možné řešení. Obdélník představující půdorys zahrady označíme $ABCD$, broskvoň na jedné z jeho úhlopříček je zastoupena bodem X. Řekněme, že dva sousední rohy ze zadání jsou A, B a platí $|AX| = 5$, $|BX| = 12$, $|AB| = 13$. (Všechny délky jsou v metrech a jednotky dále nepíšeme.) Tato čísla tvoří pythagorejskou trojici, čili platí $5^2 + 12^2 = 13^2$. Proto je trojúhelník AXB pravoúhlý s přeponou AB, tj. s pravým úhlem u vrcholu X.

Bod X může ležet buď na úhlopříčce AC nebo na úhlopříčce BD, budeme diskutovat obě možnosti. V každém případě vzdálenost bodu X od druhého vrcholu na úhlopříčce označíme x a neznámou délku strany obdélníku označíme y. Ze zadaných informací určíme y, plocha zahrady (v metrech čtverečních) pak bude rovna $13y$.



I. Bod X leží na úhlopříčce AC. Podle Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky ABC a BXC sestavíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} (5+x)^2 &= 13^2 + y^2, \\ y^2 &= 12^2 + x^2. \end{aligned}$$

Do první rovnice dosadíme za y^2 a vypočteme x:

$$\begin{aligned} (5+x)^2 &= 13^2 + 12^2 + x^2, \\ 25 + 10x + x^2 &= 169 + 144 + x^2, \\ 10x &= 288, \\ x &= \frac{144}{5}. \end{aligned}$$

Dosadíme za x do druhé rovnice a výraz upravíme:

$$y^2 = 12^2 + \left(\frac{144}{5}\right)^2 = 144 + \frac{20\,736}{25} = \frac{24\,336}{25}.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{156}{5}$ a obsah obdélníku $ABCD$, tj. plocha zahrady (v metrech čtverečních), v tomto případě je:

$$13 \cdot \frac{156}{5} = \frac{2\,028}{5} = 405{,}6.$$

II. Bod X leží na úhlopříčce BD. Podle Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky DAB a DXA sestavíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} (12+x)^2 &= 13^2 + y^2, \\ y^2 &= 5^2 + x^2. \end{aligned}$$

Do první rovnice dosadíme za y^2 a vypočteme x:

$$\begin{aligned} (12+x)^2 &= 13^2 + 5^2 + x^2, \\ 144 + 24x + x^2 &= 169 + 25 + x^2, \\ 24x &= 50, \\ x &= \frac{25}{12}. \end{aligned}$$

Dosadíme za x do druhé rovnice a výraz upravíme:

$$y^2 = 5^2 + \left(\frac{25}{12}\right)^2 = 25 + \frac{625}{144} = \frac{4\,225}{144}.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{65}{12}$ a obsah obdélníku $ABCD$, tj. plocha zahrady (v metrech čtverečních), v tomto případě je:

$$13 \cdot \frac{65}{12} = \frac{845}{12} \doteq 70,42.$$

Poznámka. Všimněte si výpočtu délky x. Dvojím užitím Pythagorovy věty jsme v prvním případě odvodili, že $5x = 144$, což odpovídá $|AX| \cdot |XC| = |XB|^2$. Uvedený výpočet v podstatě dokazuje, že tato rovnost platí v libovolném pravoúhlém trojúhelníku ABC, kde X je pata výšky na přeponu AC. Toto tvrzení je známé jako Eukleidova věta o výšce.

Jiný nápad. Všimněte si podobných trojúhelníků.

Jiné řešení. Při stejném značení jako výše můžeme jednotlivé možnosti diskutovat následovně.

I. Bod X leží na úhlopříčce AC. Trojúhelníky ABC a AXB jsou oba pravoúhlé a mají stejný vnitřní úhel u společného vrcholu A. Tyto trojúhelníky jsou tedy podobné, a proto platí:

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|XB|}{|AX|},$$

neboli

$$\frac{y}{13} = \frac{12}{5}.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{156}{5}$, a závěr je stejný jako u předchozího řešení.

II. Bod X leží na úhlopříčce BD. Trojúhelníky DAB a AXB jsou oba pravoúhlé a mají stejný vnitřní úhel u společného vrcholu B. Tyto trojúhelníky jsou tedy podobné, a proto platí:

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|AX|}{|XB|},$$

neboli

$$\frac{y}{13} = \frac{5}{12}.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{65}{12}$, a závěr je stejný jako u předchozího řešení.